А. С. БАРСОВ

ШУГАМАН ПРОГРАММЧЛАЛ ГЭЖ ЮУ БОЛОХ ТУХАЙ

Е. С. ВЕНТЦЕЛЬ

ТОГЛООМЫН ОНОЛЫН АНХНЫ МЭДЭГДЭХҮҮН

(ДУНД СУРГУУЛИЙН АХЛАХ АНГИЙН СУРАГЧИД, ИХ, ДЭЭД СУРГУУЛИЙН МАТЕМАТИКИЙН АНГИЙН ОЮУТАН БОЛОН МАТЕМАТИК СОНИРХОГЧИД, ИНЖЕНЕР, ЭДИЙН ЗАСАГЧДАД ЗОРИУЛАВ)

БНМАУ
АРДЫН БОЛОВСРОЛЫН ЯАМНЫ ХЭВЛЭЛ
УЛААНБААТАР
1971

ТОВЧ АГУУЛГА

А. С. Барсов

1. ШУГАМАН ПРОГРАММЧЛАЛ ГЭЖ ЮУ БОЛОХ ТУХАЙ

Энэхүү товхимол нь сүүлийн жилүүдэд эдийн засаг, техник, цэргийн үйл ажиллагаанд өргөн дэлгэр хэрэглэгддэг болсон математикийн чухал нэгэн салбар болох шугаман программчлалтай уншигчдыг танилцуулна.

Энэ товхимол шугаман программчлалын үндсэн бодлогыг тодорхойлж, түүнийг бодох аргатай танилцуулахаас гадна эдийн засгийн тодорхой асуудлыг шийдэхэд энэ аргыг хэрхэн ашиглахтай бас танилцуулна. Мөн түүнчлэн шугаман программчлалын онолыг хамгийн бага цаг хэрэглэх, хамгийн бага өртөгтэйгөөр ачаа тээвэрлэх тухай асуудлыг шийдэхэд хэрхэн ашиглаж болохыг үзүүлснээс гадна энэ хоёр асуудлыг хослуулсан бодлогыг яаж бодох арга замыг заажээ.

Энэ товхимлыг, математикийн аргаар төлөвлөх асуудлаар ажиллаж байгаа математикч, эдийн засагч, инженерүүд мөн энэ асуудалд тооцон бодох автомат машиныг ашиглахыг зорьж буй хүмүүст зориулав.

Е. С. Вентцель

2. ТОГЛООМЫН ОНОЛЫН АНХНЫ МЭДЭГДЭХҮҮН

Энэхүү товхимлын хоёрдугаар хэсэгт тоглоомын онолын анхны мэдэгдэхүүн ба матрицат тоглоомыг бодох зарим аргуудыг хялбарчлан тайлбарласан бөгөөд уул онолын үндсийг бараг баталгаагүй, дан ганц жишээгээр дүрслэн үзүүлжээ. Энэ номыг судлахад математикийн анализ ба магадлалын онолын анхны мэдэгдэхүүний мэдлэг хүрэлцээтэй.

Энэхүү товхимолд эдийн засаг, цэргийн үйл ажиллагаанд өргөн дэлгэр хэрэглэгддэг тоглоомын онолын гол санааг хялбарчлан бичжээ.

НЭГДҮГЭЭР ХЭСЭГ

ӨМНӨХ ҮГ

Тус товхимолд шугаман программчлалын зарим бодлогыг бодох онол, практикийн асуудлыг авч үзнэ.

Энэхүү товхимлыг үйлдвэрлэлийг төлөвлөх ба зохион байгуулахад математикийн аргыг хэрэглэх асуудлаар ажиллаж буй хүмүүст зориулсан юм.

Энэ товхимолд шугаман программчлалын үндсийг авч үзэхдээ түүний аргыг хялбараар тайлбарлахад зайлшгүй шаардагдах анхны мэдэгдэхүүнийг зохих баталгааны хамт оруулсан.

Энэ товхимлыг 1957 онд зохиогчоос шугаман программчлалын бодлогыг тооцон бодогч электрон машинаар бодох асуудлаар ажиллаж байсан хүмүүст зориулан уншсан лекцэн дээр үндэслэн бичлээ.

ЗХУ-ын ШУ Академийн сурвалжлагч гишүүн Л. А. Люстерник 1959 онд лекцийн материалтай сайтар танилцаж нилээд үнэтэй зөвлөлгөө өгч уул товхимлыг нийтлэхэд тус дөхөм үзүүлсэн билээ.

Энэ товхимлыг бичих үед тохиолдсон бэрхшээлийг шийдвэхэд гүн туслалцаа үзүүлсэн проф. А. А. Ляпунов, П. С. Красильников нарт талархлаа илэрхийлье.

Ялангуяа нягт нямбай ажиллагаагаараа энэ номын чанарыг үлэмж сайжруулсан редактор В. Д. Розенкнопт гүнээ баярлаж байна.

А. С. Барсов

УДИРТГАЛ

Манай оронд үйлдвэрлэх хүчнийг цаашид хөгжүүлэх, социалист үйлдвэрлэлийн төлөвлөлтийг сайжруулах, хөрөнгө оруулалтыг эдийн засгийн үүднээс ашигтайгаар зарцуулах зэрэг асуудлууд жилээс жилд улам бүр ач холбогдолтой болж байна.

Орчин үеийн аж үйлдвэрийг техникжүүлэн хөгжүүлэх олон янзын арга зам, ардын аж ахуйн янз бүрийн салбаруудын хоорондох харилцан холбоо болон эдийн засгийн бусад асуудлууд, дээр дурьдсан зорилтуудыг шийдвэрлэх явдлыг улам ярвигтай болгож байгаа юм.

Эдгээр зорилтыг шийдвэрлэхэд математикийн аргууд, тухайлбал шугаман программчлалын арга, мөн түүнчлэн орчин үеийн техник арга болох тооцон бодогч электрон машин нэн чухал үүрэг гүйцэтгэж байна.

Сүүлийн хориод жилд үүсэн хөгжиж байгаа шугаман программчлалын онол нь одоо үед практикт өргөн дэлгэр хэрэглэгдэх болсон бөгөөд ялангуяа үйлдвэрлэлийн зохион байгуулалт ба төлөвлөлтийн асуудалд ихээхэн ашиглагдах болжээ.

Энэ чиглэлээр гарсан анхны бүтээлүүд нь ЗХУ-ын ШУ Академийн жинхэнэ гишүүн Л. В. Канторовичид хамаарагдах ба тэрээр өөрийн бүтээлүүддээ ачаа тээвэрлэлтийн ашгийг ихэсгэх, үйлдвэрлэлийн хамгийн зохистой ажиллагааг тодорхойлох, үйлдвэрийн материалыг хэмнэлтэйгээр эсгэх зэрэг асуудлыг шийдвэрлэх математикийн аргыг боловсруулсан юм.

Л. В. Канторовичийн эдгээр бүтээлүүдийн дараа шугаман программчлалын үндсэн аргууд болох симплекс,

хослолын зэрэг арга гарсан бөгөөд эдгээр нь төлөвлөлтийг зохистойгоор гүйцэтгэх янз бүрийн асуудалд ашиглагдах боллоо. Эдгээр аргуудыг боловсруулах талаар Dantzig, charnes нар болон зөвлөлтийн хийгээд гадаадын олон эрдэмтэд ажилласан юм.

Шугаман программчлал нь тодорхой нөхцөлд захирагдсан, харилцан хамааралтай олон хувьсагч бүхий бодлогын, зохистой шийдийг олох аргыг боловсруулна. Шугаман программчлалын бодлогыг дараах маягаар тодорхойлж болох юм.

Тэнцэтгэл биш буюу тэнцэтгэлийн систем дүрстэй илэрхийлэгдсэн тодорхой нөхцөлийг хангах хэд хэдэн хувьсагчаас шугаман хамааралтай ямар нэг хэмжигдэхүүн (жишээ нь өртөг буюу хугацаа) байна гэж бодъё.

Тэгээд хувьсагчийн авах утгуудын дотроос функц нь хамгийн бага (их) утгатай байх сөрөг биш утгуудыг олох зорилго тавина.

Жишээ болгож дор дурдсан маягаар томьёолж болох ачаа тээвэрлэлтийн бодлогыг авч үзье.

Тус бүр a_i нэгж ачаа бүхий m ширхэг газраас n ширхэг газарт, газар тус бүрд b_j нэгж мөн төрлийн ачаа байхаар зөөвөрлөлт хийх шаардлага гарчээ.

$$(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$$

Ачаа тээвэрлэлтийг хамгийн бага зардалтай байхаар хэрхэн төлөвлөх вэ?

x_{ij}-гээр i дугаар газраас j дугаар газарт зөөн хүргэх ачааны тоо хэмжээг тэмдэглэе. Ийм тохиолдолд уул бодлого нь математикийн үүднээс:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j$$

тэгшитгэлүүдийг хангаж чадах бөгөөд тээврийн нийт өртөг

$$C=\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij}$$

хамгийн бага байх, x_{ij}-гийн сөрөг биш утгуудыг олох асуудалд шилжинэ. Үүнд c_{ij} нь i дугаар газраас j дугаар газарт хүргэх нэгж ачааны өртөг болой.

Зарим үед m ширхэг газраас n ширхэг газарт ачаа тээвэрлэхдээ хамгийн бага хугацаа хэрэглэхээр ачаа тээвэрлэлтийг төлөвлөх асуудал бас гарч ирдэг.

Шугаман программчлалын арга хэрэглэх өөр нэг жишээ дурдъя.

Заводууд дээр янз бүрийн эдлэл буюу үйлдэхүүнийг үйлдвэрлэхдээ олон тооны автомат дамжуулгаар оруулан гаргадаг. Ийм үед үйлдвэрлэлийг хамгийн зохистойгоор зохион байгуулах олон асуудал гарч ирнэ.

Жишээлбэл n төрлийн эдлэл гаргах m ширхэг суурь машин бүхий тасаг байна гэж бодвол i $(i = 1,2,\ldots, m)$ дугаар машины ажиллагааг тодорхойлох зүйлүүдэд ажлын сарын тодорхой хугацаа b_i, j дүгээр бүтээгдэхүүний нэгж бүрд зарцуулах хугацааны норм t_{ij} $(j = 1,2,\ldots,n)$, мөн i дүгээр машин дээр хийгдсэн j дугаар бүтээгдэхүүний нэгж бүрд зарцуулсан өртөг c_{ij} тус тус орно.

Хэрэв энэ тасаг ирэх сард бүтээгдэхүүний төрөл бүрээс тодорхой a_j too хэмжээний бүтээгдэхүүн гаргах даалгавар өгсөн бол уул даалгаврыг хамгийн бага хөрөнгө зарцуулан биелүүлэхүйцээр үйлдвэрлэлийг зохион байгуулах шаардлага гарна. Хэрэв x_{ij}-гээр i дүгээр машинаар хийсэн j дугаар бүтээгдэхүүний тоо ширхгийг тэмдэглэвэл уг бодлого, бүтээгдэхүүнийг машин бүр дээр $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant a_j$ $\sum_{j=1}^{n} t_{ij}\, x_{ij} \leqslant b_i$

нөхцөлд тохируулан хуваарилж,

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\; x_{ij}$$

нийт өртгийг боломжийн хирээр бага болгох асуудалд шилжинэ.

Шугаман программчлалын бодлогод хувьсагчуудын хүлээн авах утгад тавих шаардлага нь шугаман тэнцэтгэл биш буюу тэнцэтгэлийн системээр илэрхийлэгдэх бөгөөд хамгийн бага (их) утгыг нь олбол зохих функц нь бас эдгээр хувьсагчуудын шугаман функц байна. Энэ нь шугаман программчлал гэдэг нэр томьёонд тусгалаа олсон юм.

Зохистой шийдийг олох шугаман программчлалын арга нь уул асуудалд холбогдол бүхий хэд хэдэн шийд авч үзэхийг шаарддаг.

Практик дээр бодлого шинжлэхэд, жишээ нь суурь машин буюу үйлдвэрүүд дээр ажил зохистойгоор хуваарилах бодлогыг шинжлэн үзэхэд тодорхой нөхцөлөөс шалтгаалж, нэг шийдээс нөгөө шийдэд шилжинэ гэдэг бол үйлдвэрлэлийн янз бүрийн программыг дэс дараалан авч үзнэ гэсэн үг. Чухамхүү ийм шалтгаанаар шугаман программчлал гэдэг нэр томъёо үүссэн.

Нэгэнт шугаман программчлалын бодлого нь функц, тодорхойлогдсон муж дээрээ хамгийн бага (их) утгадаа хүрэх цэгийг олох бодлого юм бол функцийн экстремумийг олох сонгомол арга жишээ нь Лагранжийн аргыг энэ асуудалд яагаад хэрэглэж болдоггүй юм бэ? гэдэг асуудал аяндаа гарч ирнэ.

Учрыг шүүн үзвэл сонгомол арга нь, функц экстремумтэй байх цэгүүд дээрээ тухайн уламжлалтай байхыг шаарддаг билээ. Гэтэл шугаман функц тодорхойлогдох мужийнхаа захын цэгүүд дээр тухайн уламжлал байхгүй атлаа тэдгээр цэгүүд дээр экстремумтэй байдаг учир бий.

Чухам энэ шалтгаанаар экстремум олох янз бүрийн шинэ аргууд бий болсон бөгөөд түүний нэг нь шугаман программчлалын арга болой.

Шугаман программчлалын бодлогыг бодох туршлагаас үзвэл олон тооны хувьсагч бүхий бодлогыг бодоход тооцон бодогч электрон машин зайлшгүй шаардлагатай ба хүн машингүйгээр долоо хоног шахам бодох бодлогыг, машин 2-оос 5 минутанд бодож чадна. Иймд асар олон хувьсагч бүхий бодлогыг зөвхөн тооцон бодох электрон машины тусламжтайгаар гүйцэтгэнэ.

Үүний жишээ болгож, Москва хотын барилгын газруудад барилгын элс зөөх зохистой төлөвлөгөө тодорхойлсон бодлогыг дурдаж болох юм. Энэ бодлогонд 10 газраас 230 газарт элс зөөх асуудлыг авч үзсэн. «Стрела» гэдэг тооцон бодогч электрон машинаар бодож гаргасан зохистой төлөвлөгөө, 1958 оны зургадугаар сарын нэгэн арав хоногт барагцаалбал 11 % арвилан хэмнэлт өгсөн юм.

Энэ товхимолд шугаман программчлалын математикийн үндэс ба зарим бодлогыг бодох арга, тухайлбал ачаа тээвэрлэлтийн бодлогыг авч үзнэ.

I БҮЛЭГ

ШУГАМАН АЛГЕБРЫН ЗАРИМ УХАГДАХУУН БА ТОДОРХОЙЛОЛТ

Энэ бүлэгт шугаман программчлалын бодлогыг бодоход зайлшгүй шаардагдах m хэмжээст огторгуйн шугаман алгебрын үндсэн ухагдахуун ба тодорхойлолтуудыг тайлбарлана.

1 §. m Хэмжээст огторгуйн тухай ухагдахуун

Бодит тооны эрэмбэлэгдсэн гуравт (a_1, a_2, a_3) бүхнийг геометрийн үүднээс огторгуйн цэг гэж үзэж болно. Энэхүү геометрийн төсөөлөлтэй уялдуулан математикт дараах тодорхойлолтыг хэрэглэдэг: *Бодит тооны эрэмбэлэгдсэн бүх боломжтой* (a_1, a_2, a_3) *гуравтуудын олонлогийг гурван хэмжээст огторгуй гэнэ*[1].

Энэ үед тоонуудын систем (a_1, a_2, a_3) нь гурван хэмжээст огторгуйд a_1, a_2, a_3 координатууд бүхий M цэгийг эсвэл a_1, a_2, a_3 байгуулагчид бүхий **P** векторыг тус тус тодорхойлж байна гэж ярьдаг.

Зарим нэг юмс, үзэгдэл, байдлыг тодорхойлоход гурван бодит тоо хүрэлцэхгүй явдал байдаг. Жишээ нь хатуу биеийн байрлалыг огторгуйд тодорхойлоход

[1] Үүнчлэн бүх бодит (a_1) тооны олонлог нь нэг хэмжээст огторгуй бөгөөд геометр дүрслэл нь шулуун шугам юм. Мөн бодит тооны бүх боломжтой (a_1, a_2) хосуудын олонлог нь хоёр хэмжээст огторгуй болох бөгөөд геометрийн дүрслэл нь хавтгай болно.

6 бодит тоо шаардагддаг. Хэрэв нэгэн район үйлдвэрлэлийн болоод хөдөө аж ахуйн бараа, жишээ нь вагон, автомашин, тариа, сүү, чүдэнз зэрэг бараа үйлдвэрлэдэг байвал энэ районы үйлдвэрийн ба хөдөө аж ахуйн шинж байдлыг тодорхойлоход бодит тооны эрэмбэлэгдсэн дараалал шаардагдана. Жишээ нь 1 дүгээр хүснэгтээс 2 дугаар район жил бүр a_{21} тонн чулуу нүүрс, a_{22} тонн төмрийн хүдэр, a_{23} тонн болд,... a_{2n} тонн улаан буудай үйлдвэрлэдэг юм байна гэж мэдэж болно.

Үүний нэгэн адил тухайн оронд ашиглаж байгаа нисэх онгоцны янз бүрийн шатахуун хэмжээ, тухайн агуулахад байгаа янз бүрийн нэр төрлийн барааны тоо хэмжээ цөм тооны эрэмбэлэгдсэн дараалаар тодорхойлогдоно.

1 дүгээр хүснэгт

	Чулуун нүүрс (т)	Төмрийн хүдэр (т)	Болд (т)	....	Улаан буудай (т)
1-р район	a_{11}	a_{12}	a_{13}	.....	a_{1n}
2 р район	a_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}
				. .	....
Кдугаар район	a_{k1}	a_{k2}	a_{k3}	... .	a_{kn}

Эдгээр жишээнүүд эрэмбэлэгдсэн m бодит тооны дараалуудын олонлогийг авч үзэхийн чухлыг харуулж байна. Үүнд m нь дурын натурал тоо болой.

Эрэмбэлэгдсэн $(a_1. a_2. ., a_i. . ., a_m)$ m бодит тооны системийг m хэмжээст вектор гэдэг ба a_i, $i = 1,2, . . ., m$ тоонуудыг **P** $(a_1, a_2,. . a_m)$ векторийн байгуулагчууд гэнэ.

Хэрэв **P** $(a_1, a_2. ., a_m)$, **Q** $(b_1, b_2,. ., b_m)$ векторуудийн ижил байранд байгаа байгуулагч тус бүр хоорондоо тэнцүү өөрөөр хэлбэл, бүх $i = 1,2, . ., m$-ийн хувьд $a_i = b_i$ байвал эдгээрийг тэнцүү векторууд гэнэ.

Хэрэв бид, хоёр районы янз бүрийн бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэх чадлыг хамтад нь сонирхвол район тус бүрийн үйлдвэрлэх чадлыг харгалзан нэмэх замаар

гарган авна[1]. Хэрэв 1 дүгээр районы янз бүрийн бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэх чадал $\mathbf{P}_1$ $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m})$ векторээр 2 дугаар районых $\mathbf{P}_2$ $(a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2m})$ вектороор тус тус тодорхойлогдох ахул хоёр районы хамтран үйлдвэрлэх чадал нь $\mathbf{Q}$ $(a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22}, \ldots, a_{1m}+a_{2m})$ векторээр тодорхойлогдоно.

Хэрэв районы үйлдвэрлэх чадал $\mathbf{P}=\mathbf{P}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ векторээр тодорхойлогдож байгаад районы үйлдвэрлэх чадал бүтээгдэхүүний нэр төрөл тус бүрийн хувьд k дахин нэмэгдсэн бол үйлдвэрлэх чадлыг $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(ka_1, ka_2, \ldots, ka_m)$ векторээр илэрхийлж болно.

Дурдсан тодорхойлолтууд нь гурван хэмжээст огторгуйн векторууд дээр хийх үйлдлүүдийг цаашид дэлгэрүүлсэн нь болой. Гурван хэмжээст огторгуйн тухай ухагдахууныг m бодит тооны дараалал дээр дэлгэрүүлэн хэрэглэсний дунд дараах чухал тодорхойлолтод хүрлээ. Бодит байгуулагчууд бүхий m хэмжээст бүх $\mathbf{P}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ векторуудийн олонлогийг m хэмжээст огторгуй гэх ба $\mathbf{P}^m$ гэж тэмдэглэнэ. $\mathbf{P}$ ба $\mathbf{Q}$ гэсэн m хэмжээст хоёр векторийг нэмэх гэдэг нь нэмэгдэхүүн тус бүрийн харгалзсан байгуулагчуудын нийлбэртэй тэнцүү байгуулагч бүхий гурав дахь $R=\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ векторийг гарган авна гэсэн үг бөгөөд $\mathbf{P}$ векторийг k тоогоор үржүүлнэ гэдэг бол байгуулагч тус бүрийг нь энэ тоогоор үржүүлнэ гэсэн үг юм. $\mathbf{P}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ба $\mathbf{Q}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ векторуудийн хувьд $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2, \ldots, b_n=ka_n$ байхаар k тоо олдох байвал $\mathbf{P}$ векторыг $\mathbf{Q}$ векторт пропорциональ вектор гэх ба $\mathbf{P}=kQ$ гэж тэмдэглэнэ.

Хоёр векторийн хоорондох пропорциональ чанарыг олон векторуудэд дэлгэрүүлэн хэрэглэсний дунд векторуудийн шугаман эвлүүлгийн тухай ухагдахуун гарч ирдэг.

Хэрэв $\mathbf{P}=l_1\mathbf{P}_1+l_2\mathbf{P}_2+\ldots+l_s\mathbf{P}_s$ нөхцөлд тохирох $l_1, l_2, \ldots, l_s$ гэсэн бодит тоонууд олдох байвал $\mathbf{P}$ векторыг $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_s$ векторуудийн шугаман эвлүүлэг гэнэ. Энэ тохиолдолд $\mathbf{P}$ векторийн i дугаар байгуулагч нь$(i=1,2,\ldots,m)$ $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_s$ векторуудийн i дугаар байгуулагчдыг харгалзан $l_1, l_2, \ldots l_s$ тоонуудаар үржүүлж хооронд нь нэмсэнтэй тэнцэнэ.

[1] Үйлдвэрлэх чадал гэдэг нь тодорхой хугацаанд бүтээн гаргасан бүтээгдэхүүний тоо хэмжээг хэлнэ.

Хэрэв $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_{r-1}, \mathbf{P}_r$ векторуудийн ядаж нэг нь бусдынхаа шугаман эвлүүлэг болж байвал эдгээр векторуудийг шугаман хамааралтай векторууд гэж нэрлэнэ.

Энэ тодорхойлолтыг өөрөөр тодорхойлж болно. Үүнд:

$$k_1\mathbf{P}_1+k_2\mathbf{P}_2+\ldots+k_r\mathbf{P}_r=0$$

Тэнцэтгэлийг хангаж чадах ядаж нэг нь тэгээс ялгаатай $k_1, k_2, \ldots, k_r$ бодит тоонууд олдож байвал эдгээр векторуудийн системийг шугаман хамааралтай гэх ба үүний эсрэг тохиолдолд шугаман хамааралгүй векторууд гэнэ.

Хэрэв $\mathbf{P}_0$ вектор $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ векторуудийн шугаман эвлүүлэг болж байвал $\mathbf{P}_0$ вектор $\{\mathbf{P}j\}$ $(j=1,2,\ldots,n)$ векторуудийн системээр шугаман маягаар илэрхийлэгдэж байна гэж ярьдаг. Хэрэв нэг вектор, векторуудийн өгөгдсөн системийн дэд системээр шугаман маягтай илэрхийлэгдэж байвал бүх системээр нь мөн шугаман маягтай илэрхийлэгдэнэ. Учир нь үлэх бүх векторуудийг тэгтэй тэнцүү коэффициенттойгоор авч болно шүү дээ.

Энэ нэр томьёог дэлгэрүүлж, хэрэв $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_s$ систем дэх вектор тус бүр $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ системийн векторуудийн шугаман эвлүүлэг болж чадах байвал $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_s$ векторуудийн систем $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ векторуудийн системээр шугаман маягаар илэрхийлэгдэж байна гэж ярьдаг.

$\mathbf{P}(^m)$ огторгуйд

$$\left.\begin{array}{l} i_1(1,0,0,\ldots,0) \\ i_2(0,1,0,\ldots,0) \\ \ldots\ldots \\ i_m(0,0,0,\ldots,1), \end{array}\right\} \qquad (1)$$

векторуудийг авч үзье.

Эдгээрийг нэгж вектор гэнэ. Векторуудийн систем (1) нь шугаман хамааралгүй юм. Учир нь $k_1i_1+k_2i_2+\ldots+k_m i_m=0$ тэнцэтгэл зөвхөн k_i тус бүр $(i=1,2,\ldots,m)$ тэгтэй тэнцүү байхад биелэгдэнэ. $\mathbf{P}(^m)$ огторгуйн аль ч $\mathbf{P}$ $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ вектор (1) системийн векторуудээр шугаман маягтай илэрхийлэгдэнэ. Тухайлбал

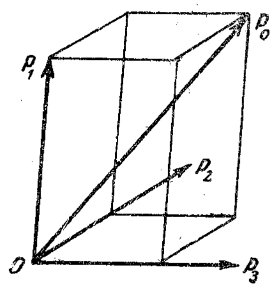
$$\mathbf{P}=a_1i_1+a_2i_2+\ldots+a_m i_m \text{ байна.}$$

Жишээлбэл хавтгай дээр координатын эхнээс нэгэн чиглэлийн дагуу биш, өөрөөр хэлбэл шугаман хамааралгүй $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ гэсэн хоёр вектор гарсан гэж саналвал гурав дахь аль ч $\mathbf{P}_0$ вектор бүр тэр хоёр векторийн шугаман эвлүүлэг болж чадах ажээ.

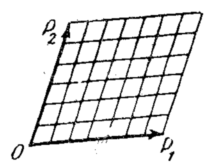
Мөн үүнчлэн гурван хэмжээст огторгуйд координатын эхнээс гарсан бөгөөд нэгэн хавтгай дээр үл орших гурван вектор өгөгдсөн байвал мөн огторгуйн дурын вектор бүр эдгээр векторуудийн шугаман эвлүүлэг болж чадна. 1 дүгээр зураг дээр $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ гэсэн шугаман хамааралгүй векторуудийн шугаман эвлүүлэг болж байгаа $\mathbf{P}_0$ векторийг дүрслэн үзүүлсэн бөгөөд энэ нь

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{P}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{P}_3$$

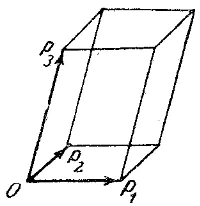
дүрстэй байна.



1 дүгээр зураг.



2 дугаар зураг.



3 дугаар зураг.

Хоёр хэмжээст огторгуйн шугаман хамааралгүй $\mathbf{P}_1\ (a_{11},\ a_{21})$, $\mathbf{P}_2\ (a_{12},\ a_{22})$ хоёр векторт тэгтэй тэнцүү биш

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

тодорхойлогч тохирно. Энэ тодорхойлогчийн туйлын хэмжигдэхүүн нь $\mathbf{P}_1$ ба $\mathbf{P}_2$ векторуудээр байгуулагдсан параллелограммын талбайтай тэнцүү (2 дугаар зураг).

Гурван хэмжээст огторгуйд $\mathbf{P}_1\ (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $\mathbf{P}_2(a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $\mathbf{P}_3(a_{13}, a_{23}, a_{33})$ гэсэн шугаман хамааралгүй гурван вектор параллелепипед үүсгэх (3 дугаар зураг) ба

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

тодорхойлогчийн туйлын хэмжээ нь тэгтэй тэнцүү биш бөгөөд параллелепипедийн эзлэхүүнтэй тэнцүү.

Мөн үүнчлэн, хэрэв m хэмжээст огторгуйд

$$\mathbf{P}_j\ (a_{1j},\ a_{2j},..,\ a_{ij},..,\ a_{mj}),\ j = 1,2,...m$$

шугаман хамааралгүй m вектор өгөгдсөн байвал

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ a_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

тодорхойлогч тэгтэй тэнцүү биш байна гэдгийг дээд алгебрт баталдаг юм.

m хэмжээст огторгуйд

$$\mathbf{P}_j\ (a_{1j}\ a_{2j}, \dots,\ a_{ij}, \dots,\ a_{mj})$$
$$j = 1,2, \dots ,n \cdot i = 1,2, \dots ,m$$

гэсэн n ширхэг дурын вектор өгөгджээ гэж үзээд эдгээр векторуудийн байгуулагчаас $m \times n$ эрэмбэтэй матриц[1] зохиоё:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \dots, & \mathbf{P}_j \dots & \mathbf{P}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{1j} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mj} \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Энэ матрицийн баганиудыг m хэмжээст векторууд хэмээн үзэж болох бөгөөд тэдгээр нь ерөнхийдөө шугаман хамааралтай ч байж болно. (2) матрицийн шугаман хамааралгүй баганиудын хамгийн их тоог матрицийн ранг гэнэ[2]. Өөрөөр өгүүлбэл (2) матрицийн ранг

[1] Энд болон цаашид P_j векторийн байгуулагчдыг матрицийн баганы болгон бичиж байя.

[2] Матрицийн шугаман хамааралгүй баганиудын хамгийн их тоо нь шугаман хамааралгүй мөрүүдийнхээ хамгийн их тоотой ямагт тэнцүү байдаг.

нь, түүний багануудыг бүрдүүлж буй байгуулагч бүхий шугаман хамааралгүй $\mathbf{P}_j$ векторуудийн хамгийн их тоотой тэнцүү. $\mathbf{P}^{(m)}$ огторгуйн шугаман хамааралгүйн хамгийн олон векторуудийн системийг энэ огторгуйн суурь гэнэ.

$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{j-1}, \mathbf{P}_j, \mathbf{P}_{j+1}, \dots, \mathbf{P}_m$ векторуудийг $\mathbf{P}^{(m)}$ огторгуйн суурь гэж үзээд A суурь гэж нэрлэе. Тэгвэл энэ огторгуйн дурын $\mathbf{P}$ вектор бүхэн $\mathbf{P}_j$, $j=1,\dots$, m векторуудээр нэгэн утгатайгаар шугаман маягтай илэрхийлэгдэнэ. Нэгэн вектор огторгуйн ямар ч суурь ижил тооны векторуудээс тогтсон байна.

$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_m$ суурьт үл хамаарагдах $\mathbf{Q}$ вектор авахад, хэрэв энэ вектор тэгтэй тэнцүү биш бол

$$\mathbf{Q} = \alpha_1 \mathbf{P}_1 + \alpha_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \alpha_{j-1} \mathbf{P}_{j-1} + \alpha_j \mathbf{P}_j + \\ + \alpha_{j+1} \mathbf{P}_{j+1} + \dots \alpha_m \mathbf{P}_m$$

шугаман эвлүүлгийн ядаж нэг коэффициент нь тэгээс ялгаатай байна.

Жишээ нь $\alpha_j \neq O$ гэж бодвол A суурийн $\mathbf{P}_j$ векторийг

$$\mathbf{P}_j = \frac{1}{\alpha_j} \cdot \mathbf{Q} - \frac{\alpha_1}{\alpha_j}\mathbf{P}_1 - \dots - \frac{j\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\mathbf{P}_{j-1} - - \cdot \frac{\alpha_m}{\alpha_j}\mathbf{P}_m$$

дүрстэй бичиж болно. A суурьас $\mathbf{P}_j$ векторийг зайлуулж оронд нь $\mathbf{Q}$ векторийг оруулбал $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{j-1}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}_{j+1}, \dots, \mathbf{P}_m$ систем нь дахин суурь болж чадна. Яагаад гэвэл ямар ч векторийг суурь векторуудээр нэгэн утгатай задалж болдог ба хэрэв A суурьас $\mathbf{P}_j$ векторийг зайлуулчихвал $\mathbf{Q}$ вектор бусад үлэх векторуудийн шугаман эвлүүлэг болж үл чадна. Иймд $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{j-1}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}_{j+1}, \dots, \mathbf{P}_m$ систем нь шугаман хамааралгүй систем болж суурь үүсгэх болно.

A суурийн аль нэг векторийг уул суурьт үл хамаарагдах вектороор солиход үүссэн B суурийг, A суурьас нэг удаагийн солилтоор гарах суурь гэж нэрлэе.

m хэмжээст огторгуйд $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_j, \dots \mathbf{P}_n$ гэсэн $n+1$ ширхэг вектор өгөгдсөн бөгөөд эдгээр нь $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_m$ суурь дээр

$$\left.\begin{array}{l}
\mathbf{P}_\circ = в_1 \mathbf{Q}_1 + в_2 \mathbf{Q}_2 + \dots + в_m \mathbf{Q}_m, \\
\mathbf{P}_1 = a_{11}\mathbf{Q}_1 + a_{21} \mathbf{Q}_2 + \dots + a_{m1} \mathbf{Q}_m, \\
\mathbf{P}_2 = a_{12} \mathbf{Q}_1 + a_{22} \mathbf{Q}_2 + \dots + a_{m2} \mathbf{Q}_m, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{P}_j = a_{1j} \mathbf{Q}_1 + a_{2j} \mathbf{Q}_2 + \dots + a_{mj} \mathbf{Q}_m \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{P}_n = a_{1n} \mathbf{Q}_1 + a_{2n} \mathbf{Q}_2 + \dots + a_{an} \mathbf{Q}_m
\end{array}\right\} \quad (3)$$

задралтай юм гэж үзээд энэ задралын байгуулагчдаас

$$\left\| \begin{array}{lllll}
\mathbf{P}_\circ & \mathbf{P}_1 \cdots & \mathbf{P}_j & \cdots \mathbf{P}_n \\
b_1 & a_{11} \cdots & a_{1j} & \cdots a_{1n} \\
b_2 & a_{21} \cdots & a_{2j} & \cdots a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \\
b_i & a_{i1} \cdots & a_{ij} & \cdots a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \\
b_m & a_{m1} \cdots & a_{mj} & \cdots a_{mn}
\end{array} \right\| \qquad (4)$$

матриц зохиоё. Мөн $q_1, q_2, \dots, q_m$ векторууд $\mathbf{P}^{(m)}$ огторгуйн өөр нэг шинэ суурь үүсгэх бөгөөд вектор бүр $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_m$ суурь дээр

$$q_1 = q_{11} \mathbf{Q}_1 + q_{21} \mathbf{Q}_2 + \dots + q_{m1} \mathbf{Q}_m,$$
$$q_2 = q_{12}Q_1 + q_{22}Q_2 + \dots + q_{m2}Q_m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_m = q_{1m} \mathbf{Q}_1 + q_{2m} \mathbf{Q}_2 + \dots + q_{mn} \mathbf{Q}_m,$$

задралтай юм гэж бодъё. $q_1, q_2, \dots, q_m$ векторууд суурь үүсгэх учраас

$$\triangle = \begin{vmatrix} q_{11} & a_{12} & \dots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2m} \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mn} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

тодорхойлогч тэгээс ялгаатай байна.

Хэрэв $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_m$ суурьас $q_1, q_2, \dots, q_m$ суурьт шилжвэл $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ векторуудийн $q_1, q_2, \dots, q_m$ суурь дээрх задралын коэффициентүүд ерөнхийдөө $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_m$ суурь дээрх задрлын коэффициентоос ялгаатай байна.

$$\mathbf{P}_\circ = в_1^1 q_1 + в_2^1 q_2 + \dots + в_m^1 q_m$$
$$\mathbf{P}_j = a_{1j}^1 q_1 + a_{2j} q_2 + \dots + a_{mj}^1 q_m$$
$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

Задралын матриц энэ үед

$$\left\| \begin{array}{lllll}
\mathbf{P}_\circ & \mathbf{P}_1 \dots & \mathbf{P}_j \dots & \mathbf{P}_n \\
в_1^1 & a_{11}^1 \dots & a_{1j}^1 \dots & a_{1n}^1 \\
в_2^1 & a_{21}^1 \dots & a_{2j}^1 \dots & a_{2n}^1 \\
| & | & | & | \\
| & | & | & | \\
в_m^1 & a_{m1}^1 \dots & a_{mj}^1 \dots & a_{mn}^1
\end{array} \right\| \qquad (6)$$

дүрстэй байна. (6) матрицийн элементүүд нь (4) мат-рицийн элементүүдээр тодорхойлогдох бөгөөд (5) то-дорхойлогч

$$в_i^1 = \frac{\Delta^0 i}{\Delta}; \quad a_{ij}^1 = \frac{\Delta_i^j}{\Delta} \qquad (7)$$

томьёогоор тодорхойлогдоно. Үүнд:

$$\Delta_i^0 = \begin{vmatrix} q_{11} \cdots q_{1,\,i-1} & b_1 & q_{1,\,i+1} \cdots q_{im} \\ q_{21} \cdots q_{2,\,i-1} & q_2 & q_{2,\,i+1} \cdots q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{m1} \cdots q_{m,\,i-1} & b_m & q_{m,\,i+1} \cdots q_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_i^i = \begin{vmatrix} q_{11} \cdots q_{1\,i-1} & a_{1j} & q_{1,\,i+1} \cdots q_{im} \\ q_{21} \cdots q_{2,i-1} & a_{j2} & q_{2,i+1} \cdots q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{m1} \cdots q_{m,\,i-1} & a_{mj} & q_{2\,i+1}\, q_{mn} \end{vmatrix}$$

$(i = 1, 2, \cdots, m; \; j = 1, 2, \cdots, n)$

Цаашид бид эдгээр тодорхойлогчдыг Δ, $\Delta^0{}_i$, Δ_i^j-гээр тэмдэглэхийн зэрэгцээ зарим үед

$$\Delta = (q_1, q_2 \cdots q_m); \; \Delta_i^0 = (q_1 \cdots q_{i-1} \; \mathbf{P}_0 \, q_{i+1} \; \cdots q_m)$$

$$\Delta_l^j = (q_1, \cdots q_{i-1} \; \mathbf{P}_j \; \mathbf{P}_{i+1} \cdots q_m)$$

тэмдэглэлийг бас ашиглаж байх болно.

Өгөгдсөн векторуудийн системийг шинэ суурь дээр хэрхэн задлах жишээ авч үзье.

$\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ суурь дээр $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$ векторууд

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P}_0, & \mathbf{P}_1, & \mathbf{P}_2, & \mathbf{P}_3, & \mathbf{P}_4, & \mathbf{P}_5, & \mathbf{P}_6 \end{array}$$
$$\begin{Vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

матрицаар тодорхойлогдох задралтай юм гэж санаяа. $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$ векторуудийн байгуулагчаас үүссэн

$$\Delta = (\mathbf{P}_4, \; \mathbf{P}_5, \; \mathbf{P}_6) = \begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

тодорхойлогч тэгээс ялгаатай байгаа учир $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$ векторууд суурь үүсгэнэ.

$\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$ векторуудийн $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$ суурь дахь задралыг олъё. (7) томьёог ашиглавал

$$\frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} (\mathbf{P}_0, \; \mathbf{P}_5, \; \mathbf{P}_6), & (\mathbf{P}_1, \; \mathbf{P}_5, \; \mathbf{P}_6), \text{———} \\ (\mathbf{P}_4, \; \mathbf{P}_5, \; \mathbf{P}_0) \text{———————} \end{Vmatrix}$$

матриц гарна. Зохих бодолтыг гүйцэтгэсний дараа өгөгдсөн векторуудийн $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$ суурь дээрх задралыг харуулсан

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P}_0, & \mathbf{P}_1, & \mathbf{P}_2, & \mathbf{P}_3, & \mathbf{P}_4, & \mathbf{P}_5, & \mathbf{P}_6 \end{array}$$
$$\begin{Vmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{18} & \frac{7}{18} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{23}{9} & \frac{1}{6} & -\frac{11}{18} & -\frac{1}{18} & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

матриц гарна.

$\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ векторуудийн скаляр үржвэр нь

$$(\mathbf{P}\,\mathbf{Q}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_i b_i + \cdots + a_m b_m$$

томьёогоор тодорхойлогддог билээ. Үүнд; a_i, b_i нь $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ векторуудийн байгуулагчид юм. Хэрэв $\mathbf{P}$ ба $\mathbf{Q}$ векторуудийн скаляр үржвэр тэгтэй тэнцүү байвал, тэдгээрийг тоонолжин векторууд гэнэ. $m \times n$ эрэмбийн матрицийг $(m \times n)$ хэмжээст вектор гэж үзэж болох тул

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots & \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots & \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \cdots\cdots a_{ij} & \cdots \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1} a_{m2} \cdots & \cdots a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11} \; b_{12} \cdots & \cdots b_{1n} \\ b_{21} \; b_{22} \cdots & \cdots b_{2n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \cdots\cdots b_{ij} & \cdots \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \\ b_{m1} \; b_{m2} \cdots & \cdots b_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрицуудийн скаляр үржвэр гэж

$$\begin{Vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрицийн бүх элементүүдийн алгебрын нийлбэрийг үзэх ба $A \cdot B$ гэж тэмдэглэнэ.

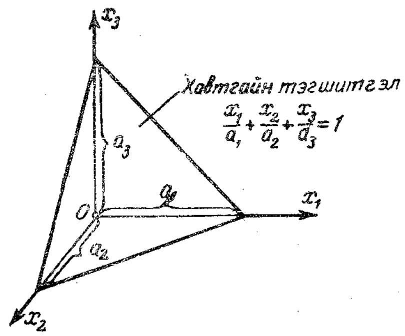
2 §. Хэт хавтгай ба хагас огторгуй

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = c \qquad (8)$$

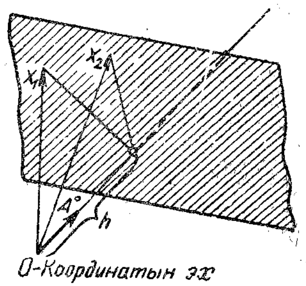
шугаман тэгшитгэл нь гурван хэмжээст огторгуйд $A(A_1, A_2, A_3)$ векторт перпендикуляр хавтгайг тодорхойлдог гэж аналитик геометрээс бид мэдэх билээ. (8) тэгшитгэлийг

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\frac{x_3}{a_3}=1 \tag{9}$$

дүрст шилжүүлье. Энэ тэгшитгэл нь координатын тэнхлэгүүдийг a_1, a_2, a_3 хэрчмүүдээр огтлон өнгөрөх хавтгайг тодорхойлно (4 дүгээр зураг).



4 дүгээр зураг



5 дугаар зураг

Түүнээс гадна гурван хэмжээст огторгуй дахь хавтгайн тэгшитгэлийг $(A^\circ \cdot X)=h$ гэсэн вектор хэлбэртэйгээр бичиж болдог. Үүнд A° нь уул хавтгайд перпендикуляр нэгж вектор, X нь координатын эхийг хавтгайн аль нэг цэгтэй холбосон хувьсах вектор юм. Харин $(A^\circ \cdot X)$ бол A°, X векторуудийн скаляр үржвэр бөгөөд түүний хэмжээ нь X векторийн A° вектороор тодорхойлогдох чиглэл дээрх проекц h-тай тэнцүү байна. h нь координатын эхнээс хавтгай хүртэлх зайтай тэнцүү учир $h=o$ байхад хавтгай нь координатын эхийг дайран өнгөрсөн байна.

Хавтгайн цэгийг координатын эхтэй холбосон вектор бүхэн A° векторийн чиглэл дээр нэгэн ижил проекцтой байна. (5 дугаар зураг)

Үүнтэй төстэйгээр

$$A_1x+A_2x_2+\ \dots\ +A_m x_m=c \tag{8}$$

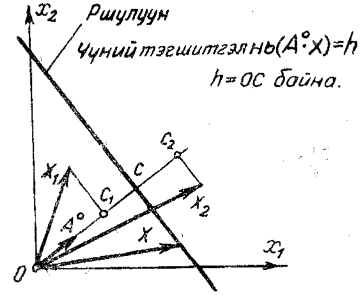
тэгшитгэлийг хангаж чадах бүх $(x_1, x_2 \dots, x_m)$ цэгүүдийн олонлогийг m хэмжээст огторгуй дахь хэт хавтгай гэж нэрлээ. Энэ хавтгайг $A(A_1, A_2, \dots, A_m)$ вектор нормаль хавтгай гэж үзнэ. Мөн тэрчлэн

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ \dots\ +\frac{x_m}{a_m}=1$$

тэгшитгэл нь координатын тэнхлэгүүдийг $a_1, a_2, \dots, a_m$ хэрчмүүдээр огтлон өнгөрөх хэт хавтгайг дүрсэлнэ.

Эцсэд нь $(A^\circ \cdot X)=h$ вектор тэгшитгэл $P^{(m)}$ огторгуйд A° нэгж векторт нормаль бөгөөд координатын эхнээс h зайд орших хэт хавтгайг тодорхойлох болно.

Хавтгай дээрх шулуун нь уул хавтгайгаа хоёр хэсэгт хуваах бөгөөд хэсэг тус бүрийг хагас хавтгай гэж нэрлэнэ. 6 дугаар зураг дээр, шулуун шугам хавтгайг хоёр хагас хавтгай болгон хуваажээ. Түүнээс гадна нэгэн хагас хавтгай дээр төгсгөл бүхий X_1 векторуудийн проекцууд $h=Oc$-гээс бага, харин нөгөө хагас хавтгай дээр төгсгөл бүхий X_2 векторуудийн проекц h-аас их байна.



6 дугаар зураг.

Гурван хэмжээст огторгуй дахь хавтгай нь уул огторгуйг хагас огторгуй гэж нэрлэгдэх хоёр хэсэгт хуваана.

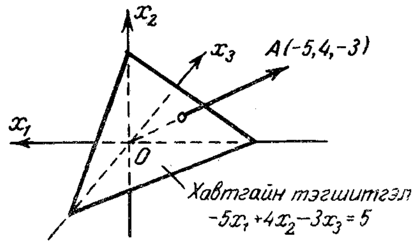
Үүнчлэн m хэмжээст огторгуй дахь хэт хавтгай нь уул огторгуйгаа хоёр хэсэгт хуваана гэж үзээд хэсэг тус бүрийг нь хагас огторгуй гэж нэрлэе.

$P^{(m)}$ огторгуй дахь хэт хавтгай $(A^\circ \cdot X)=h$ гэсэн вектор тэгшитгэлтэй гэж үзвэл нэгэн хагас огторгуй дээрх M цэгүүдийг координатын эхтэй холбосон X векторуудийн A°-гийн чиглэл дээрх проекц нь h-аас бага, харин нөгөө хагас огторгуй дахь цэгүүдийг координатын эхтэй холбосон векторуудийн проекц h-аас их байна. Тийнхүү хагас огторгуйнуудын нэг нь $(A^\circ \cdot X)<h$ тэнцэтгэл бишид тохирох векторуудийн олонлог болох ба нөгөө хагас огторгуйн векторуудийн хувьд $(A^\circ \cdot X)>h$ байна. $A^\circ \cdot X=h$ хэт хавтгайг аль нэг хагас огторгуйд хамааруулж болно. Тэгвэл m хэмжээст огторгуйн бүх цэгүүд нь $(A^\circ \cdot X)\leqslant h$ байх нэг анги. мөн $(A^\circ X)>h$ байх өөр нэг анги болон хуваагдана. (Эсвэл $(A^\circ \cdot X)<h$, $(A^\circ X)\geqslant h$ байх хоёр анги хуваагдана.)

1 дүгээр жишээ. $-5x_1+4x_2-3x_3 \leqslant 5$ гэсэн хагас огторгуй өгөгджээ. Энэ хагас огторгуйд (0,0,0) цэг хамаарагдах уу?

Үүнд хариулахын тулд $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ утгуудыг өгөгдсөн тэнцэтгэл бишид тавивал хангалттай. Үүний дунд $-5\cdot0+4\cdot0-3\cdot0<5$ гарах тул (0,0,0) цэг $-5x_1+4x_2-3x_3 \leqslant 5$ хагас огторгуйд үнэхээр хамаарагдах ажээ.

$-5x_1+4x_2-3x_3=5$ хавтгай $A(-5,4,-3)$ векторт перпендикуляр байна (7 дугаар зураг).



7 дугаар зураг

2 дугаар жишээ. Есөн хэмжээст огторгуйн $x_1=0$, $x_2=4$, $x_3=3$, $x_4=-7$, $x_5=0$, $x_6=0$, $x_7=9$, $x_8=1$, $x_9=0$ цэг $4x_1+5x_2-7x_3+x_5-2x_6+12x_7-3x_9 \leqslant 11$ хагас огторгуйд хамаарагдах уу? Энэ цэгийн координатуудыг өгөгдсөн тэнцэтгэл бишид тавивал $4\cdot0+4\cdot5-3\cdot7-7\cdot0+0\cdot1-2\cdot0-9\cdot12-1\cdot0-3\cdot0=109>11$ гарна. Иймд энэ цэг өгөгдсөн хагас огторгуйд үл харьяалагдана.

3 §. Гүдгэр олон талст

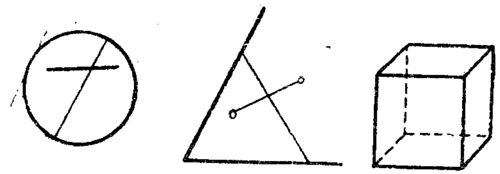
Хэрэв биетийн дурын хоёр цэгийг холбосон хэрчим нь бүхлээрээ, уул биетдээ харьяалагдаж байвал тийм биетийг гүдгэр гэнэ.

Дугуй, бөмбөрцөг, куб, нэгэн цэгээс гарсан хоёр цацрагаар үүссэн өнцөг зэрэг нь гүдгэр биетийн жишээ болж чадна (8 дугаар зураг).

Хэрэв x,y гэсэн хоёр цэгийг A,B гүдгэр биетүүдийн ерөнхий цэгүүд гэж үзвэл (9 дүгээр зураг) x ба y нь A биетэд харьяалагдах учраас тэдгээрийг холбосон хэрчим мөн A биетэд харьяалагдана. Мөн иймшалтгаанаар энэ хэрчим бас B биетэд харьяалагдана.

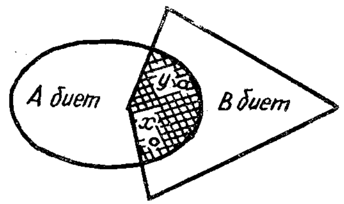
Иймд хэрчим нь A ба B биетүүдийн ерөнхий хэсэгт харьяалагдах ажээ. Энэ нь хоёр гүдгэр биетийн ерөнхий хэсэг бас гүдгэр биет байна гэдгийг гэрчилж байна.

Хавтгай дээр өөрийгөө үүсгэхэд оролцож байгаа шулуун тус бүрээс нэг тийш орших олон өнцөгт авч үзье.



8 дугаар зураг.

10 a зураг дээрх олон өнцөгт нь гүдгэр юм. Учир нь ийм олон өнцөгтийн аль ч хоёр x, y цэгүүдийг холбосон хэрчим бүхлээрээ уг олон өнцөгттөө харьялагдаж байна. Харин 10 б дугаар зураг дээрх олон өнцөгт нь түүнийг байгуулахад оролцсон шулуун тус бүрээс нэг тийш оршиж чадахгүй байна. Ийм олон өнцөгт гүдгэр байж чадахгүй.



9 дүгээр зураг

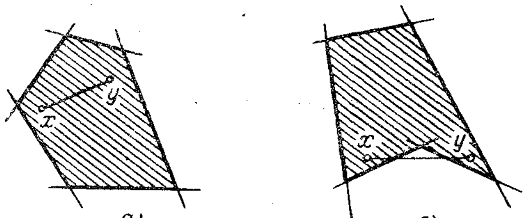
Гүдгэр олон өнцөгтөд үл харьяалагдах дурын M цэгийг үзье (11 a дугаар зураг). Энэ үед уг олон өнцөгт ба M цэг хоёр талд нь байрласан байхаар PQ шулууныг ямагт татаж болно. Хэрэв шулуун шугам тухайн гүдгэр олон өнцөгттэй ядаж нэг ерөнхий цэгтэй байхын зэрэгцээ, уг олон өнцөгтийн бүх цэгүүд тэрхүү шулуунаас нэг тийш орших ахул, түүнийг тулгуур шулуун гэнэ. Ийм тулгуур шулуун хэд ч байж болно.

11,б дүгээр зураг дээрх AD, CB, DB, FN шулуунууд тулгуур шулуунууд бөгөөд ер нь тулгуур шулуун гүдгэр олон өнцөгттэй зөвхөн ганц цэгээр юм уу, бүхэл бүтэн хэрчмээр огтлолцсон байж болно.

Гурван хэмжээст огторгуйд,талст тус бүрийг агуулсан хавтгай бүхнээсээ нэг тийш орших биет нь гүдгэр байх бөгөөд түүнийг гүдгэр олон талст гэнэ.

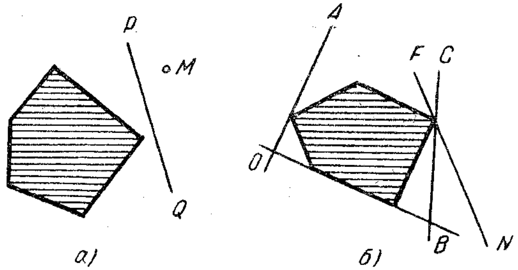
Олон талст доржпалам чулуу, призм зэрэг нь гүдгэр биетийн жишээ болой.

Хэрэв хавтгай тус бүр олон талсттай наад зах нь нэг ерөнхий цэгтэй байхаас гадна уул олон талст тэдгээр хавтгайнуудаас нэг тийш орших бол ийм хавтгайнуудыг тулгуур хавтгай гэнэ. Тулгуур хавтгай нь олон талсттайгаа түүний орой хэмээн нэрлэгдэх нэг цэг, мөн түүний ирмэг гэж нэрлэгдэх хэрчим, эсвэл түүний талст гэж нэрлэгдэх олон өнцөгтөөс тогтсон ерөнхий хэсэгтэй байж болно.



10 дугаар зураг

Олон талстын орой ба ирмэг бүрийг дайруулан үй олон тулгуур хавтгай татаж болох бөгөөд харин талстыг дайруулан зөвхөн ганц тулгуур хавтгай татаж болно.



11 дүгээр зураг.

Хэд хэдэн гүдгэр биетийн ерөнхий хэсэг нь мө гүдгэр биет байдгийг бид өмнө үзсэн билээ. Ийм хэд хэдэн олон талстын ерөнхий хэсэг гүдгэр бие болох нь илэрхий. Нэгэнт хавтгай нь гүдгэр биет ба даг болохоор олон талст, хавтгай хоёрын огтлолцо

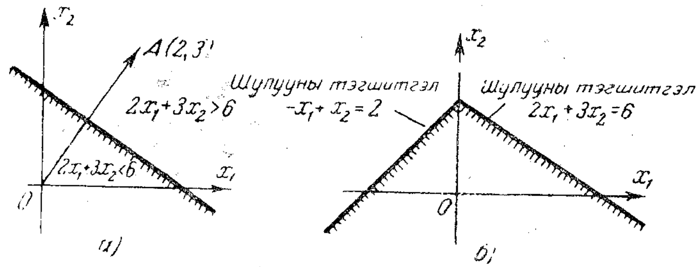
бас л гүдгэр биет байх ба энэ нь эсвэл цэг, эсвэл шулуун, эсвэл олон өнцөгт байна. Гурван хэмжээст огторгуй дахь гүдгэр биетийн чанартай төстэйгээр олон хэмжээст огторгуй дахь гүдгэр «биетийн» чанарыг авч үзэж болно. Эдгээр чанаруудын заримыг 4,5 §-д авч үзнэ.

4 §. Шугаман тэнцэтгэл бишийн систем

Хоёр хэмжээст огторгуйд

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2 \leqslant b_i^* \ (i1,2\ ,\ \dots\ ,\ n) \qquad (10)$$

дүрсийн n ширхэг тэнцэтгэл биш өгөгджээ. Ийм тэнцэтгэл биш нэг бүр $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ шулуун заагтай хоёр хагас хавтгайн аль нэгийг тодорхойлох бөгөөд зааглагч $a_{i1}x_1+a_{i2}\boldsymbol{x}_2=b_i$ шулуун нь $A_i(a_{i1}, a_{i2})$ вектopт нормаль байна (10) системийн тэнцэтгэл биш нэг



12 дугаар зураг.

бүрийг хангаж чадах (x_1, x_2) хос тоо бүхнийг өгөгдсөн системийн шийд гэнэ. Өөрөөр өгүүлбэл (x_1, x_2) хавтгайн цэгүүдийн дотроос (10) системийг хангаж чадах нь бүхэн нь шийд болж чадна.

Хэд хэдэн жишээ авч үзье.

1.

$$\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{2} \leqslant 1 \text{ буюу } 2x_1+3x_2 \leqslant 6$$

тэнцэтгэл биш хагас хавтгайг тодорхойлно.

* $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2 \geqslant b_i$ дүрсийн тэнцэтгэл биш бүрийн хоёр талыг -1-ээр үржүүлсний дараа (10) дүрст шилжинэ.

(12, а дугаар зураг). Энэ тэнцэтгэл бишид хавтгайн зураасласан хэсэг дэх дурын цэг бүхэн тохирох ба зааглагч шулуун нь $2x_1 + 3x_2 = 6$ тэгшитгэлтээр тодорхойлогдохоос гадна $A(2,3)$ векторт нормаль байна.

2. $2x_1 + 3x_2 \leqslant 6$

$-x_1 + x_2 \leqslant 2$

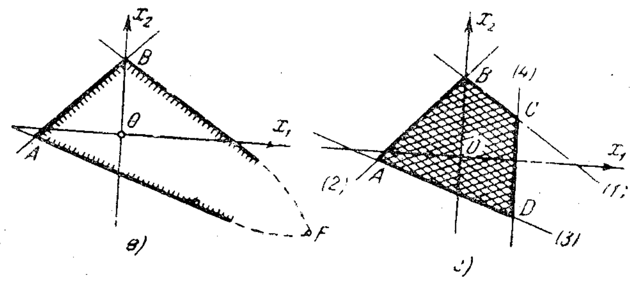
гэсэн хоёр тэнцэтгэл биш нь хавтгайн 12 б дүгээр зураг дээр дүрсэлсэн хэсгийг тодорхойлно.

3. $2x_1 + 3x_2 \leqslant 6$

$-x_1 + x_2 \leqslant 2$

$-x_1 - 3x_2 \leqslant 3$

тэнцэтгэл бишүүдийг AFB гурвалжны (12 в дүгээр зураг) бүх цэгүүд хангана.



12 (в,г) дүгээр зураг.

4. $2x_1 + 3x_2 \leqslant 6$

$-x_1 + x_2 \leqslant 2$

$-x_1 - 3x_2 \leqslant 3$

$x_1 \leqslant 3/2$

тэнцэтгэл бишүүдийг $ABCD$ олон өнцөгтийн бүх цэгүүд хангана. (12 г дугаар зураг).

5. $2x_1 + 3x_2 \leqslant 6$

$x_1 + x_2 \leqslant 2$

$-x_1 - 3x_2 \leqslant 3$

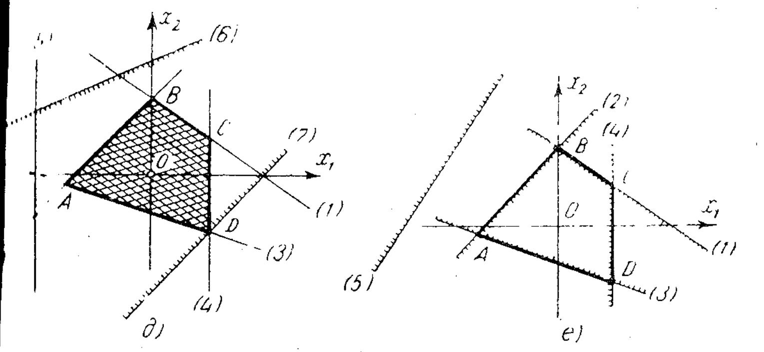
$2x_1 \leqslant 3$

$-x_1 \leqslant 3$

$-3x_1 + 7x_2 \leqslant 21$ (6)

$x_1 - 3x_2 \leqslant 3$ (7)

гэсэн долоон тэнцэтгэл бишийн шийд нь 4 дүгээр жишээний шийдтэй адил байна.



12 (д,е) дугаар зураг.

(5), (6), (7) тэнцэтгэл бишүүд системийн шийдэд нөлөөлөхгүй учраас тэдгээрийг анхаарахгүй байж болно. Учир нь (5), (6) тэнцэтгэл бишүүд $ABCD$ олон өнцөгттэй нэг ч ерөнхий цэг байхгүй заагдагч шулуунуудыг тодорхойлно. Харин (7) шулуун нь дурдсан олон өнцөгттэй ганц ерөнхий цэгтэй байх ба ийм учраас тулгуур шулуун болно. (12,д дүгээр зураг).

6. $2x_1 + 3x_2 \leqslant 6$ (1)

$x_1 + x_2 \leqslant 2$ (2)

$x_1 - 3x_2 \leqslant 3$ (3)

$2x_2 \leqslant 3$ (4)

$3x_1 - 2x_2 \leqslant -12$ (5)

Тэнцэтгэл бишийн систем ганц ч шийд байхгүй байна. Үүнийг геометрийн үүднээс үзвэл координат нь уг системийг хангах ганц ч цэг байхгүй гэсэн үг юм (12, е дугаар зураг).

Дээрх жишээнүүдийг авч үзсэний дунд дараах дүгнэлт хийж болно.

1. Хоёр хувьсагч бухий тэнцэтгэл бишийн систем шийдгүй байж болно. Энэ тохиолдолд өгөгдсөн сис-

темээр тодорхойлогдох бүх хагас хавтгайнуудад зэ рэг харьяалагдах цэг наад зах нь нэг ширхэг олдоно

Ийм цэгүүдийн олонлог нь хагас хавтгай, хязгаар лагдсан буюу үл хязгаарлагдсан олон өнцөгт, шулуу буюу түүний хэрчим эсвэл ганц цэг ч байж болно Учир иймд тэнцэтгэл бишийн системд тохирох цэгүү дийн олонлог нь гүдгэр биет байх ажээ.

2. Тэнцэтгэл бишийн систем нь нийцгүй байж бол но. Энэ тохиолдолд системийн тэнцэтгэл бишүүдэд нэгэн зэрэг тохирох ганц ч цэг хавтгай дээр олдох гүй.

Асуудлыг явцууруулахгүйгээр гурван хэмжээст ог торгуйд n тэнцэтгэл бишийн системийг

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \leqslant b_i \quad (i = 1,2\ ,\ldots,\ n) \qquad (11)$$

дүрстэйгээр бичиж болно. (11) системийн тэнцэтгэ биш тус бүр

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$$

заагларч хавтгай бүхий хагас огторгуйг тодорхойлн гэдгийг бид мэдэх билээ. (11) систем нь нийцтэй байх болно. Энэ тохиолдолд тэнцэтгэл бишийн системд то хирох цэгүүдийн олонлог гурван хэмжээст огторгуй гаас олдох ба энэ олонлог нь гүдгэр олонлог бай бөгөөд тэрээр хагас огторгуй, олон талст, хавтга олон өнцөгт, шулуун, хэрчим, цаашилбал цэг ч бай болно.

Нийцтэй системийн дотор хаячихад системийн ши дэд үл нөлөөлөх 2 янзын «илүү» тэнцэтгэл биш бай болно. Үүний нэг нь шийдийн олонлоготой нэг ч ерө хий цэг байхгүй заагларч хавтгайтай байна. Харин н гөө нь шийдүүдийн олонлогт тулгуур хавтгай бол чадах заагларч хавтгай байна.

Гурван хэмжээст огторгуйгаас системийн тэнцэтгэ бишүүдэд нэгэн зэрэг тохирох ганц ч цэг олдохгү байвал уг системийг нийцгүй гэнэ.

m хэмжээст огторгуйд $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m \leqslant b_i$ $(i = 1,2\ ,\ldots\ n)$ (12) тэнцэтгэл бишийн систем өгөгджээ.

Гурван хэмжээст огторгуйн хувьд яригдаж байсан тай төстэйгээр (12) системийн тэнцэтгэл биш тус бү m хэмжээст огторгуйд

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = b_i$$

заагларч хэт хавтгай бүхий хагас огторгуйг тодорхойл но гэж ярьж болно. Хэрэв m хэмжээст огторгуйгаас (12)-ын бүх тэнцэтгэл бишид нэгэн зэрэг тохирох ядаж нэг $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ цэг олдож байвал уг системийг нийцтэй гэх ба ийм цэгүүдийн олонлогийг шийдийн «олон талст» гэж нэрлэе.

m хэмжээст огторгуйд $M^1(x_1^1,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_m^1)$, $M''(x_1'',\ x_2'' \ldots x_m'')$ гэсэн хоёр цэг өгөгдсөн байг. t параметр o-ээс 1 хүртэл өөрчлөгдөх үед

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + t(x_1'' - x_1') \\ x_2 &= x_2' + t(x_2'' - x_2') \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= x_m' + t(x_m'' - x_m') \end{aligned}$$

тохиолдолд тохирох координатууд бүхий $M(x_1, x_2, \ldots x_m)$ цэгүүдийн олонлогийг M' ба M'' цэгүүдийг холбосон хэрчим гэнэ. «Шийдийн олон талст» нь хагас огторгуйнуудын огтлолцол болохоор гүдгэр олонлог байна. Энэ нь M' ба M'' цэгүүдийг холбосон хэрчим бүхлээрээ уул шийдэд харьяалагдана гэсэн үг юм.

(12) системийн шийдийг өөрчлөхгүйгээр, хаяж болохоор тэнцэтгэл бишийг бусдаасаа хамаарах буюу «илүү» тэнцэтгэл биш гэнэ. Ийм тэнцэтгэл бишүүдийг өгөгдсөн системээс дэс дараалан зайлуулбал, өгөгдсөн системтэй ижил шийдтэй дэд систем үүснэ.

«Илүү» тэнцэтгэл бишийг олж илрүүлэх явдал нарийн бөгөөд төвөгтэй байдаг. Шугаман программчлалын аргын нэг онцлог нь тэрээр шугаман функцийн олон талст дээрх хамгийн бага (их) утгыг олохдоо «илүү» тэнцэтгэл бишийг илрүүлэх тусгай арга шаардлагагүйд оршино. Хэрэв m хэмжээст огторгуйгаас (12) системийн тэнцэтгэл бишүүдэд нэгэн зэрэг тохирох ганц ч цэг олдохгүй байвал уг системийг нийцгүй гэнэ.

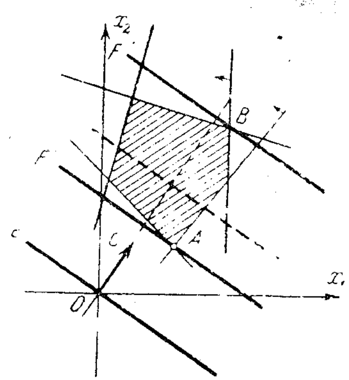
5 §. Шугаман хэлбэр олон талст дээр хамгийн бага ба их утгадаа хүрэх тухай

Хоёр янзын илүү тэнцэтгэл бишийг зайлуулах замаар шийдийнх нь олон өнцөгт «цэвэршсэн» хоёр хувьсагч бүхий шугаман тэнцэтгэл биш авч үзье. (13 ду-

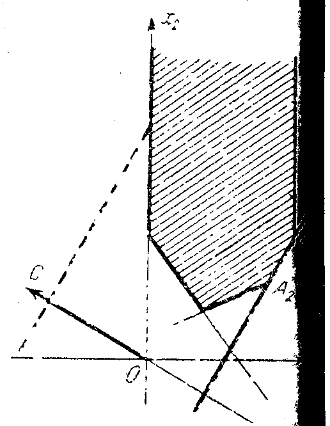
гаар зураг) Мөн түүнчлэн хоёр хувьсагчийн шугама

$$f = c_1x_1 + c_2x_2$$

функц өгөгдсөн гэж үзээд шийдийн олон өнцөгтий (x_1, x_2) цэгүүдийн дотроос $f = c_1x_1 + c_2x_2$ шугама функцид хамгийн бага ба их утга өгч чадах цэгү дийг олъё. $f = c_1x_1 + c_2x_2$ функц тодорхой f_1, утг тай байх бүх (x_1, x_2) цэгүүдийн олонлогийг авч үзвэ ийм цэгүүдийн олонлог нь $c_1x_1 + c_2x_2 = f_1$ шулуун ба на. Энэ шулуун нь өмнөх зүйлд тэмдэглэсэн ёсоо координатын эхнээс гарсан $C(c_1, c_2)$ векторт нормал байна. Одоо C векторт нормаль F шулуун (13 дугаа зураг) татаж, түүнийг C векторын эерэг чиглэлий дагуу өөртэй нь параллелиар хөдөлгөе. Ийнхүү хө дөлгөх замд F шулуун хамгийн түрүүнд олон өнцө тийн A оройтой дайралдах юм гэж саная. F шулуун A оройтой дайралдах үеийн байрлал F^1 нь тулгуу шулуун болно. F шулууныг цааш нь уг чиглэлийн да гуу хөдөлгөөд байвал B оройг дайрах үедээ бас ту гуур шулуун болж хувирна.



13 дугаар зураг



14 дүгээр зураг

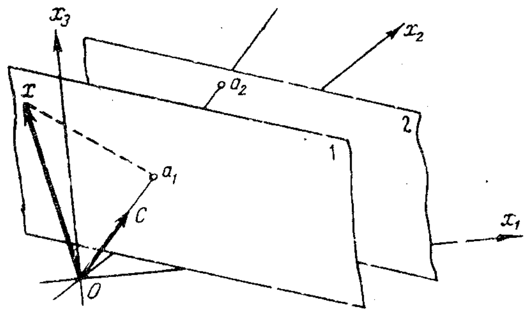
Нэгэнт $C(c_1, c_2)$ векторын эерэг чиглэл нь $f = c_1x_1 + c_2x_2$ шугаман функцийн хамгийн хурдан өсөх чи тул, f-ийг, шийдийнхээ олон өнцөгт дээр хүлээн ава утгуудын дотроос хамгийн бага нь F' тулгуур шулуу

гээр, хамгийн их нь F'' тулгуур шулуун дээр тус тус байна.

Тийнхүү $f = c_1x_1 + c_2x_2$ шугаман функц, хамгийн бага ба их утгадаа $C(c_1c_2)$ векторт нормаль тулгуур шулуунууд ба шийдийн олон өнцөгтийн огтлолцол дээр хүрнэ. Тулгуур шулуун, шийдийн олон өнцөгт хоёрын огтлолцол нь эсвэл нэг цэгээс[1] (олон өнцөгтийн орой) эсвэл тоо тоймшгүй олон цэгээс (энэ тохиолдолд энэ олонлог нь олон өнцөгтийн тал байна) тогтоно.

14 дүгээр зураг дээр f шугаман функц хамгийнхаа бага утгат A_1A_2 хэрчмийн бүх цэгүүд дээр хүрсэн бөгөөд хамгийнхаа их утгат олон өнцөгтийн хязгааргүй алслагдсан цэг дээр хүрэх байдлыг дүрсэлжээ.

Үүний нэгэн адил гурван хувьсагч бүхий $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ шугаман функц, $C(c_1, c_2, c_3)$ векторт нормаль хавтгай дээр тогтмол утга хүлээж авах ба C-гийн чиглэл f функцийн хамгийн хурдан өсөлтийн чиг юм. Энэ функц хамгийн бага ба хамгийн их утгаа,шийдийн



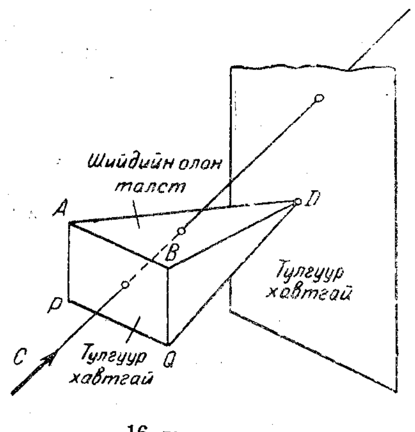
15 дугаар зураг

олон талст $C(c_1, c_2, c_3)$ векторт нормаль тулгуур хавтгайтай огтлолцсон цэгүүд дээр хүлээн авна. Үүнд нэг тулгуур хавтгай дээр нь хамгийн бага утгатаа, нөгөө дээр нь их утгатаа тус тус хүрнэ.

Олон талст, тулгуур хавтгай хоёрын огтлолцол эсвэл нэг цэгээс (олон талстын орой) эсвэл тоо тоймшгүй олон цэгээс (олон талстын ирмэг, талс) тогтоно.

[1] Энэ цэг нь хязгааргүй алслагдсан цэг байж болно.

Жишээлбэл (6 дугаар зураг дээр f функц ABQ талсын бүх цэгүүд дээр хамгийн бага утгаа D цэг дэ хамгийн их утгада тус тус хүрэх бай лыг үзүүллээ.



16 дугаар зураг

Хоёр ба гурва хувьсагч бүхий шуга ман функцийн туха ухагдахууныг цааши өргөтгөвөл $x_1, x_2 \ldots, x$ гэсэн n ширхэг боди хувьсагч бүхий, шуга ман хэлбэр гэж нэр лэгддэг $f = c_1x_1 +$ $x_2 + \ldots + c_n x_n$ дү сийн функц гарч и дэг. Үүнд, $c_1, c_2 \ldots$ c_n нь бодит тоонуу болой. Шугаман хэ бэрийн утгуудыг f $= f_1; f = f_2, \ldots, f = f_q$ гэж тодруулбал n хэмжээст о торгуйн $C(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ гэсэн n хэмжээст вектор нормаль байх

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$$
$$f_2 = c_1x_1 + c_2x_2 \ldots + c_n x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_q = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$$

хэт хавтгайнуудыг тодорхойлно.

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$$

Хэлбэрийн хамгийн бага утгыг $f_{\min}$-ээр хамгийн и утгыг $f_{\max}$-аар тус тус тэмдэглэе. Нэгэнт C вект рийн чиглэл f хэлбэрийн хамгийн хурдан өсөлтий чигийг тодорхойлдог учир $f' < f_{\min}$, $f' > f_{\max}$ бай үеийн $f' = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$ хэт хавтгайнуу шийдийн олон талсттай үл огтлолцоно. Нөгөө тала $f_{\min} \leqslant f'' \leqslant f_{\max}$ үеийн $f'' = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x$ хэт хавтгайнууд нь шийдийн олон талсттай ерөнхи цэгтэй байх бөгөөд f шугаман хэлбэр хамгийн ба утгадаа хүрэх $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ цэг нь шийди олон талст $C(c_1c_2, \ldots, c_n)$ векторт нормаль ба $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n = f_{\min}$ тулгуур хэт хавтг хоёрын огтлолцсон цэг байна. Үүнчлэн шийдийн ол талст, мөн C векторт нормаль байх $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots$

$c_n x_n = f_{\max}$ тулгуур хэт хавтгай хоёрын огтлолцсон цэг дээр f хэлбэр хамгийн их утгатай байна.

Шийдийн олон талст, тулгуур хэт хавтгай хоёрын огтлолцол нь олон талстын орой, ирмэг буюу «талс» байна.

Тийнхүү шийдийн олон талстын ядаж нэг оройг агуулсан цэгүүд дээр шугаман хэлбэр нь зохистой утгадаа хүрнэ. Ийм учраас зохистой шийдийг олохын тулд шугаман хэлбэр хамгийн бага (их) утгаа авах олон талстын оройг сонгон авбал хангалттай юм.

6 §. Шугаман программчлалын бодлогыг бодох үед тэнцэтгэл бишийг тэнцэтгэлд шилжүүлэх

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{array}\right\} \qquad (12)$$

гэсэн n хувьсагч бүхий m шугаман тэнцэтгэл бишийн систем өгөгджээ. Энэ систем нь шийдийн олон талстыг тодорхойлно. Энэ системээс гадна

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \mu_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \mu_2 = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + \mu_i = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n + \mu_m = b_m \end{array}\right\} \qquad (12')$$

гэсэн $n+m$ хувьсагч бүхий m алгебрын шугаман тэгшитгэлийн систем авч үзье. (12) системийн $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ шийд тус бүрд (12′) системийн $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \mu_1^0, \ldots, \mu_m^0$ гэсэн тодорхой шийдүүд харгалзах ба тэдгээр нэмэлт хувьсагчууд нь $\mu_1^0 \geqslant 0, \mu_2^0 \geqslant 0, \ldots$ $\mu_m^0 \geqslant 0$ нөхцөлийг хангасан байна гэдгийг үзүүлье. Үнэхээр ч, хэрэв $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ нь (12) системийн шийд мөн бол

$$a^0_{11} x^0_1 + a_{12}\, x^0_2 + \ldots + a_{1n} x^0_n \leqslant b_1$$
$$a_{21} x^0_1 + a_{22} x^0_2 + \ldots + a_{2n} x^0_n \leqslant b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i1}\, x^0_1 + a_{i2}\, x^0_2 + \ldots + a_{in}\, x^0_n \leqslant b_i$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} x^0_1 + a_{m2} x^0_2 + \ldots + a_{mn} x^0_n \leqslant b_m$$

тэнцэтгэл бишүүд биелэгдэнэ.

$$\left.\begin{aligned}
\mu^0_1 &= b_1 - (a_{11} x^0_1 + a_{12} x^0_2 + \ldots + a_{1n}\, x^0_n) \\
\mu^0_2 &= b_2 - (a_{2i}\, x^0_1 + a_{22} x^0_2 + \ldots + a_{2n}\, x^0_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mu^0_i &= b_i - (a_{i1} x^0_1 + a_{i2}\, x^0_2 + \ldots + a_{in}\, x^0_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mu_m &= b_m - (a_{m1} x^0_1 + a_{m2} x^0_2 + \ldots + a_{mn} x^0_n)
\end{aligned}\right\} (12'')$$

гэж тэмдэглэвэл нэгдүгээрт $\mu^0_1 \geqslant 0, \mu^0_2 \geqslant o, \ldots, \mu^0_m \geqslant o$, хоёрдугаарт $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n, \mu^0_1, \mu^0_2, \ldots, \mu^0_m$ тоонууд (12″) ёсоор (12′) системийн шийд мөн нь илт байна.

Урвуулан (12′) системийн $\mu^0_1 \geqslant o, \mu^0_2 \geqslant o, \ldots, \mu^0_m \geqslant 0$ нөхцөлийг хангах $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n, \mu^0_1, \mu^0_2, \ldots \mu^0_m$ шийд бүрд (12) системийн тодорхой шийд харгалзана гэдгийг үзүүлье. Үнэхээр ч, $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n, \mu^0_1, \mu^0_2, \ldots \mu^0_m$ тоонууд (12′) системийн шийд мөн болохоор

$$a_{11} x^0_1 + a_{12} x^0_2 + \ldots + a_{n1}\, x^0_n + \mu^0_1 = b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} x^0_1 + a_{m2} x^0_2 + \ldots + a_{mn} x^0_n + \mu^0_m = b_m$$

тэнцэтгэлүүдийг бичиж болно. Нөгөөтэйгүүр $\mu^0_1, \mu^0_2, \ldots \mu^0_m$ тоонуудыг сөрөг биш гэж үзсэн учир

$$a_{11} x^0_1 + a_{12} x^0_2 + \ldots + a_{1n}\, x^0_n \leqslant b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} x^0_1 + a_{m2}\, x^0_2 + \ldots + a_{mn} x^0_n \leqslant b_m$$

тэнцэтгэл бишүүд биелэгдэх нь алба бишээ. Өөрөөр хэлбэл $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n$ тоонууд (12) системийн шийд мөн ажээ.

Тийнхүү (12) системийн бүх $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n$ шийдүүд, (12′) системийн бүх $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n, \mu^0_1, \mu^0_2, \ldots \mu^0_m$ шийдүүдийн хооронд харилцан нэгэн утгатай тохиролцоо тогтоолоо. Тэгэхдээ нэмэлт хувьсагч $\mu^0_1, \mu^0_2, \ldots, \mu^0_n$ нь сөрөг биш байх юм. Иймд учраас (12) дүрстэй шугаман тэнцэтгэл бишүүдийн системийг бодох бодлогыг түүнд харгалзах (12) дүрсийн шугаман тэгшитгэлийн системийг бодох асуудалд шилжүүлж болох юм байна.

Шугаман программчлалын бодлогод $x_1 \geqslant o$, $x_2 \geqslant o$, ..., $x_n \geqslant o$ нөхцөлд тохирох хувьсагч бүхий тэнцэтгэл бишийн системийг бодох шаардлага гардаг. Ийм шийдийг сөрөг биш шийд гэж нэрлэдэг. Иймд, нэгэнт тэнцэтгэл бишийн системийг бодох асуудал алгебрын шугаман тэгшитгэлийн системийг бодох асуудалд шилждэг учраас, шугаман программчлалын чухал асуудлуудын нэг нь шугаман тэгшитгэлийн системийн сөрөг биш шийдийг олоход оршино.

Жишээ
$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 6$$
$$-x_1 + x_2 \leqslant 2$$
$$-x_1 - 3x_2 \leqslant 3$$

тэнцэтгэл бишүүдийн системийн сөрөг биш шийдийг олъё. $\mu_1 \geqslant o$, $\mu_2 \geqslant o$, $\mu_3 \geqslant o$ нэмэлт хувьсагчдыг оруулж

$$2x_1 + 3x_2 + \mu_1 = 6$$
$$-x_1 + x_2 + \mu_2 = 2$$
$$-x_1 - 3x_2 + \mu_3 = 3$$

гэсэн систем гарган авна. Энэ системийн сөрөг биш шийд бүрд өгөгдсөн системийн сөрөг биш тодорхой шийд харгалзах ба мөн үүний урвуу өгүүлбэр бас хүчинтэй байдаг билээ. Жишээ нь тэгшитгэлийн системийн $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 7$ шийдэд өгөгдсөн системийн $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ гэсэн сөрөг биш шийд харгалзана.

Хэрэв тэнцэтгэл бишийн систем нь сөрөг биш шийдийн муж дээр нийцгүй байвал түүнд харгалзах шугаман тэгшитгэлийн систем сөрөг биш шийд байхгүй байна гэдгийг тэмдэглэе.

Шугаман хэлбэрийн, тэнцэтгэл бишийн системээр тодорхойлогдох олон талст дээрх хамгийн бага (их) утга шийдийн олон талстын тодорхой нэг орой дээр

байдаг билээ. Шийдийн олон талстын орой бүр харгал… зах алгебрын шугаман тэгшитгэлийн системийн сөрө… биш шийдэд тохирох ба тэгэхдээ нэмэлт хувьсагчды… ядаж нэг нь тэгтэй тэнцүү байна гэдгийг үзүүлж болно… μ_1 o, μ_2 o, … , $\mu_n \geqslant o$ байх нэмэлт хувьсагчийг гео… метрийн үүднээс тайлбарлаж болдог.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a\ \ x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m$$

тэнцэтгэл бишийн системийн шийдийн олон талсты… авч үзье. Энэ системийн x_1^o, x_2^o, … , x_n^o сөрөг би… шийдийн нэг нь мэдэгдэж байна гэж үзвэл, түүн… шийдийн олон талстад харьяалагдах $M(x_1^o, x_2^o, \ldots$ $x_n^o)$ цэг харгалзана.

hi-гээр M цэгээс i дугаар хэт хавтгай хүртэлх зай… тэмдэглэе. Нэмэлт хувьсагчийн

$$+ a_{12}x_2^o + \ldots + a_{1n}x_n^o)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu_m^o = b_m - (a_{m1}x_1^o + a_{m2}x_2^o + \ldots + a_{mn}x_n^o)$$

утгууд нь μ цэгээс

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

хэт хавтгайнууд хүртэлх зайтай пропорциональ байна… Яагаад гэвэл тодорхойлолт ёсоор M цэгээс i дугаа… хэт хавтгай хүртэлх зай

$$h_i = \frac{b_i - (a_{i1}x_1^o + a_{i2}x_2^o + \ldots + a_{in}x_n^o)}{\sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2}} \quad (i = 1,2,3, \ldots m)$$

томьёогоор илэрхийлэгдэх ба эндээс

$$\mu_1 = h_1\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu_i = h_i\sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu_m = h_m\sqrt{a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + \ldots + a_{mn}^2}$$

гэж олдоно.

II БҮЛЭГ

ШУГАМАН ПРОГРАММЧЛАЛЫН ҮНДСЭН БОДЛОГЫГ ШИЙДЭХ

Шугаман программчлал нь дор дурдсан бодлогыг бодох аргыг судалдаг математикийн нэгэн салбар юм:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (13)$$

гэсэн n хувьсагч бүхий m шугаман тэгшитгэлийн систем, мөн эдгээр хувьсагчаас хамаарсан

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \quad (14)$$

шугаман хэлбэр өгөгдөж, (13) системийн шийдүүдийн дотроос f шугаман хэлбэр хамгийн бага утгатай[1] байх сөрөг биш шийдийг сонгон авах шаардлага гардаг.

Энэ бүлэгт (13) системийн сөрөг биш нэг шийдийг олох арга, мөн шугаман программчлалын үндсэн бодлогыг бодох нэг барилтай танилцана.

7 §. Алгебрын шугаман тэгшитгэлийн системийн адилтгал хувиргалт

(13) систем нь шугаман хамааралгүй r тэгшитгэлийг агуулах бөгөөд тэгшитгэл тус бүр өөр өөр хувь-

[1] f-ийн хамгийн их утгыг олох тухай бодлого бас иймэрхүү маягаар томьёологдоно.

сагчийн хувьд бодогдсон байх юм гэж саная. Эдгээр r тэгшитгэл эхнийхээ r ширхэг хувьсагчийн хувьд бодогдсон байна гэж үзэхэд асуудал явцуурахгүй.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_1-(a_{1r+1}x_{r+1}+a_{1r+2}x_{r+2}+\dots+a_{1n}x_n) \\ x_2 &= b_2-(a_{2r+1}x_{r+1}+a_{2r+2}x_{r+2}+\dots+a_{2n}x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i &= b_i-(a_{ir+1}x_{r+1}+a_{ir+2}x_{r+2}+\dots+a_{in}x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r &= b_i-(a_{rr+1}x_{r+1}+a_{2r+2}x_{r+2}+\dots+a_{rn}x_n) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

(15) системийг хураангуйлан бичвэл

$$x_i = b_i - \left(\sum_{j=r+1}^{n} a\, x_{j\,i\,j}\right),\ i=1,r,\ \dots,\ r \qquad (15')$$

дүрстэй болно. (15) системийн bi сул гишүүдийг сөрөг биш гэж үзье.

(15) системийн тэгшитгэл тус бүрийг

$$\sum_{i=1}^{r} x_i P_i = P_0 - \left(\sum_{j=r+1}^{n} x_j\, p_j\right) \qquad (16)$$

вектор тэгшитгэлийн $P_1, P_2, \dots, P_r$ векторууд дээрх проекц гэж үзэж болно.

Үүнд: $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1(1,0,\dots 0)$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2(0,1,0,\dots 0)\dots$ $\mathbf{P}_r = \mathbf{P}_r(0,0,\dots 1)$ векторууд болой. $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_r$ векторууд нь r хэмжээст огторгуйд суурь үүсгэнэ. Энэ үед $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_r, \dots, \mathbf{P}_n$ векторуудийн задралын матриц нь

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2\dots & \mathbf{P}_i\dots & \mathbf{P}_r & \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_{r+1}\dots & \mathbf{P}_j\dots & \mathbf{P}_n \end{array}$$
$$\left\| \begin{array}{ccccc|c|c} 1 & & & b_1 & a_{1r+1} & a_{ij} & a_{1n} \\ & 1 & & b_2 & a_{2r+1} & a_{ij} & a_{2n} \\ & & & & & & \\ & & 1 & b_i & a_{ir+1} & a_{ij} & a_{in} \\ & & & & & & \\ & & 1 & b_r & a_{rr+1} & a_{rj} & a_{rn} \end{array} \right\| \qquad (17)$$

дүрстэй бичигдэнэ.

(16) тэгшитгэлд орсон $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_r, \mathbf{P}_{r+1}, \dots, \mathbf{P}$ векторууд нь бие биеэс ядаж нэг вектороор ялгагда r эрэмбийн хэд хэдэн суурь үүсгэх юм гэж саная. Ий суурьудыг хувийн суурь гэж нэрлэе. $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ векторуудийг $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots \mathbf{P}_i \dots, \mathbf{P}_r\, \mathbf{P}_{r+1}, \dots, \mathbf{P}_j, \dots, \mathbf{P}$ векторуудийн системийн хувийн суурь гэж үзье. Нэгэ

суурьас нөгөө суурьт шилжихэд (15) системийн бүх коэффициент өмнөх бүлгийн (7) томьёогоор хувирах ба энэ үед (15) систем өөртэйгөө ижил шийдтэй эн чацуу системд шилжинэ.

Хэрэв тэгтэй тэнцүү биш $\mathbf{P}_0$ вектор A суурь дээр $\mathbf{P}_0 = \sum_{i=1}^{r} \beta_i\, \mathbf{P}_i,\ \beta_i \geqslant 0$ дүрстэй бичигдэж чадах байвал A суурийг $\mathbf{P}_0$ векторийн хувьд эерэг суурь гэж нэрлэе. (15) системийг авч үзвэл түүний ил[1] хувьсагчдад харгалзах $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_r$ векторуудийг агуулсан A суурь бүх $b_r \geqslant 0$ гэж үзсэн учраас эерэг суурь мөн болох нь илт байна. (15) системд ил бичигдсэн $(x_1\ x_2 \dots x_r)$ хувьсагчдыг үндсэн хувьсагч, бусдыг нь үндсэн биш хувьсагч гэж нэрлэх ба системийн үндсэн биш хувьсагчдыг тэгтэй тэнцүүлэх үед олдсон шийдийг үндсэн шийд гэнэ.

Вектор бүрийг тухайн суурь дээр зөвхөн ганц утгатай задалж болох теорем ёсоор үндсэн шийд нь дурын хувийн суурь дээр бас нэгэн утгатай тодорхойлогдоно.

Цаашид бид алгебрын шугаман тэгшитгэлийн системийг зөвхөн хувийн эерэг суурь дээр авч үзэх тул өнчлэгийнхээ товчийг бодож «хувийн», «эерэг» хэмээх үгүүдийг хэрэглэхээ больё.

(15) системийг авч, нэгэн суурьас нөгөө суурьт шилжих дүрмийг тодорхойлъё. Үүний тулд (17) матрицийг ашиглая.

I. Ил гараагүй хувьсагчдын $a_{1j}, a_{2j}, \dots a_{ij}, \dots a_{rj}$ $(1 \leqslant i \geqslant r)$ коэффициентүүдийн дотор эерэг коэффициент заавал байна гэж үзээд тийм коэффициент орсон j-р $(r+1 \leqslant j \leqslant n)$ баганыг олъё.[2] (ийм багана байхгүй байх тохиолдлыг 8 §-д үзнэ)

Тийм багана нь j_1 дүгээр багана болог.

II. i-гийн бүх утгад a_{ij_1} эерэг байх юм гэж бодоод $min\left(\frac{bi}{a_{ij_1}}\right)$-ийг тодорхойлъё.

[1] Хэрэв тэгшитгэлийн нэг хувьсагчийг бусад хувьсагчдаар илэрхийлсэн байвал энэ илэрхийлэгдсэн хувьсагчийг ил хувьсагч гэж нэрлэв. (орчуулагч)

[2] Тэгшитгэлийг (15) систем дүрстэй бичих үед хаалтанд орсон коэффициентүүдийн тэмдгийг анхаарна.

Энэ харьцааны минимумуудийн нэг $i = i_1$ байх үед тохиолдох юм гэж саная. $a_{i_1 j_1}$ элементийг (15) системийн шийдвэрлэгч элемент гэж нэрлэе.

III. i_1 дугээр тэгшитгэлийн x_{j_1} хувьсагчийг бусдаар нь илэрхийлж, түүний утгыг (15) системийн бусад тэгшитгэлүүдэд тавивал өөртэйгөө эн чацуу

$$x_{j_1} = \frac{b_{i1}}{a_{i_1 j_1}} - \left(\frac{x_i}{a_{i_1 j_1}} + \sum_{j \neq J1} \frac{a_{i_1 j}}{a_{i_1 j_1}} x_j \right)$$

$$x_i = (b_i - a_{i j_1} \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 j_1}} - \left[- \frac{a_{i j_1}}{a_{i_1 j_1}} x_{i1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j \neq J_1} \left(a_{ij} - a_{i j_1} \frac{a_{i^1 j}}{a_{i_1 j_1}} \right) xj \right]$$

$$i = 1,2, \ldots, i_1 - 1,\ i_1 + 1, \ldots, r - 1,$$

$$x_r = \left(b_r - a_{r j_1} \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 j_1}} \right) - \left[- \frac{a_{r j_1}}{a_{i_1 j_1}} x_{i1} + \sum_{j = J_1} - \left(a_{rji} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - a_{r j_1} \frac{a_{i_1 j}}{a_{i_1 j_1}} \right) xj \right] (j = r + 1, \ldots, n)$$

системд шилжинэ. $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_{i1-1}, \mathbf{P}_{j_1}, \mathbf{P}_{j_1+1} \ldots, \mathbf{P}_r$ векторууд шинэ A_2 суурь үүсгэнэ. Учир нь эдгээр векторуудэд харгалзах тодорхойлогч тэгтэй тэнцүү биш

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \ldots & \mathbf{P}_{i1-1} & \mathbf{P}_{j_1} & \mathbf{P}_{i1+1} \ldots & & \mathbf{P}_r \end{array}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & & & a_{1j_1} & & \\ & 1 & & a_{2j_1} & & \\ & & 1 & \vdots & & \\ & & & a_{i_1 j_1} & 1 & \\ & & & \vdots & & \\ & & & a_{r j_1} & & 1 \end{Vmatrix} = a_{i_1 j_1}$$

тул суурь үүсгэнэ гэдгийг (18) систем харуулж байна.

Бас шинэ сул гишүүд сөрөг биш учраас дээрх суурь эерэг байна. Үнэхээр ч сул гишүүд

$$b_i - a_{i j_1} \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 j_1}} = a_{i j_1} \left(\frac{b_i}{a_{i j_1}} - \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 j_1}} \right)$$

дүрстэйгээс гадна хэрэв $a_{i j_1} > 0$ байвал II дүрэм ёсоор $\frac{b_i}{a_{i j_1}} \geqslant \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 j_1}}$ байх тул сул гишүүн сөрөг биш, хэрэв $a_{i j_1} \leqslant 0$ байвал сул гишүүн бас сөрөг биш байх ажээ.

(15) системийг (18) систем болгон хувиргасан I, II, III дүрмээр тодорхойлогдох хувиргалтыг адилтгал хувиргалт буюу симплекс хувиргалт гэнэ.

Адилтгал хувиргалтын тодорхойлолтоос үзвэл (15) маягийн шугаман тэгшитгэлийн систем нь хэрэв тэгшитгэлийн баруун талын хувьсагчдын коэффициент эерэг байвал адилтгал хувиргалтаар хувиргаж болох ажээ. Алгебрын шугаман тэгшитгэлийн дэс дараалсан адилтгал хувиргалтыг геометрийн үүднээс, энэ системд харгалзсан вектор тэгшитгэлийг нэг удаагийн солилтоор үүсэх янз бүрийн хувийн эерэг суурь дээр дэс дараалан задалсан задралт гэж тайлбарлаж болно.

Адилтгал хувиргалтыг шугаман программчлалын үндсэн бодлогыг бодоход ашиглахын тулд, түүнийг доор дурдсан нэмэлт нөхцөлтэйгээр авч үзэж байх болно.

(15) системийн хамгийн сүүлчийн r дугаар тэгшитгэлд адилтгал хувиргалтыг дэс дараалан тоо томшгүй олон удаа хийж болох юм гэж саная.[1] Энэ юу гэсэн үг вэ? гэвэл r дугаар тэгшитгэл дээр адилтгал хувиргалтыг хичнээн ч удаа үйлдлээ гэсэн баруун талын хувьсагчдын коэффициентийн дотор тухай бүрд заавал эерэг коэффициент байх ба хувиргалт тус бүрд тохирох шийдвэрлэгч элемент нь энэхүү тэгшитгэлд үл харьяалагдана гэсэн үг. Адилтгал хувиргалтын дараалалд сууриас суурьт шилжих $A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots$ дараалал харгалзана. r, n хоёр төгсгөлтэй байхад бие биеэс ялгаатай суурийн тоо бас төгсгөлтэй байх тул $A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots$ дарааллын дотор өмнө дайралдсан суурьтайгаа дайралдах үе тохиолдоно. Энэ тохиолдолд «давтагдах» үзэгдэл явагдлаа гэж ярьдаг.

Хэрэв адилтгал хувиргалт бүрийн дунд bi сул гишүүдийг харгалзах $a_{i i_k}$ коэффициентод харгалзуулан хамгийн бага харьцаа $\min\limits_{i} \left\{ \frac{bi}{a_{i j_k}} \right\}$ тэгээс ялгаатай бай-

[1] Одоо бидний танилцах зүйл нь дурын i дугаар тэгшитгэлд тохирно гэдгийг сануулъя.

вал (18) систем дэх r дугаар тэгшитгэлийн сул ги шүүний утга алхам бүрийд хорогдох нь сул гишүүни өөрийнх нь илэрхийллээс илт байна. Үүнд j_k нь шийд вэрлэгч элемент $a_{ilk}\cdot 2$ агуулсан баганын дугаар бол но. Сонгон авсан суурь бүр системийн тэгшитгэлийн сул гишүүний утгыг нэгэн утгатай тодорхойлох ту янз бүрийн суурьт сул гишүүний янз бүрийн олонло харгалзах ба үүний урвуу өгүүлбэр бас хүчин төгөл дөр байна. Ийм учраас энэ тохиолдолд өмнө тохиолд сон суурьтай дахин дайралдах боломжгүй байна. Ийм тоо томшгүй олон хувиргалтын дараалал байж болох гүй нь мэдээж биз. Энэ нь төгсгөлтэй тооны хувир галтын дараа эсвэл r дугаар тэгшитгэлийн баруун та лын үл мэдэгдэхийн бүх коэффициентүүд эерэг биш $a_{rj} \leqslant 0$ болох $(r+1 \leqslant j \leqslant)n$ эсвэл ямар нэг хувиргал тын шийдвэрлэгч элемент энэ тэгшитгэлд хамаарах юм гэдгийг нотолж байна.

Хэрэв аль нэг хувиргалтаас эхлээд хувиргалтын шийдвэрлэгч элемент, тэгтэй тэнцүү bi сул гишүү бүхий тэгшитгэлүүдэд харьяалагдаж байвал r дугаар тэгшитгэлийн сул гишүүний утга өөрчлөгдөхгүй үл дэнэ. Яагаад гэвэл (18) системийн сүүлчийн тэгшитгэ

лээс сул гишүүний $b_r - a_{rj_1} \frac{bi_1}{aij_1}$ илэрхийлэл дэх ха сагч нь тэгтэй тэнцүү байх нь харагдаж байна. Ийм нөхцөлд давтагдах үзэгдэл гарах боломжтой байдаг

Наад зах нь хоёр суурь векторийг дайран өнгөрөх хэт хавтгайг суурь хэт хавтгай гэж нэрлэе.

Хувиргалтад эрж буй системийн тэгшитгэлүүд тэ гээс ялгаатай сул гишүүнтэй байна гэдэг бол $\mathbf{P}_0$ век тор нэг буюу хэд хэдэн хэт хавтгайд зэрэг харьяа лагдана гэсэн үг юм. Энэ тохиолдлыг ном зохиолд хэ рэглэдэг нэр томьёоны дагуу бөхөх үзэгдэл явагдаж байна гэж ярьдаг.

Тийнхүү «давтагдах» үзэгдэл явагдах зайлшгүй нөх цөл нь бөхөх үзэгдэл явагдахад оршино.

Жишээ болгож

$$x_1 = 2 - (2\ x_4 + x_5)$$
$$x_2 = 3 - (3\ x_4 - x_5)$$
$$x_3 = 2 - (x_4 + 2\ x_5)$$

систем авч үзье.

Үүнд тохирох вектор тэгшитгэл нь

$$x_1\ \mathbf{P}_1 + x_2\ \mathbf{P}_2 + x_3\ \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_0 - (x_4\ \mathbf{P}_4 + x_5\ \mathbf{P}_5)$$

дүрстэй байх ба векторуудийн байгуулагчид нь

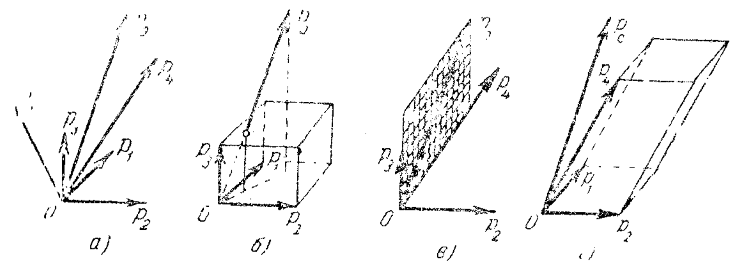
$$\begin{Vmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

матрицийг үүсгэнэ.

$\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$ векторууд хэд хэдэн суурь үүсгэнэ (17 а дугаар зураг). Жишээ нь $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ нэг суурь $\mathbf{P}_2$ $\mathbf{P}_3$ $\mathbf{P}_4$ өөр нэг суурь үүсгэнэ. $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ $\mathbf{P}_3$ суурьт $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=3$, $x_3=2$, $x_4=0$, $x_5=0$ үндсэн шийд харгалзана. Энэ үед $\mathbf{P}_0$ вектор

$$\mathbf{P}_0 = 2\ \mathbf{P}_1 + 3\ \mathbf{P}_2 + 2\ \mathbf{P}_3$$

гэсэн эерэг коэффициент бүхий шугаман эвлүүлэг болон бичигдэнэ. Үүнийг геометрийн үүднээс тайлбарлавал $\mathbf{P}_0$ вектор $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ векторууд дээр байгуулагдсан параллелепипедийг «нэвтлэн» өнгөрнө гэсэн үг юм (17 б дугаар зураг). Одоо өгөгдсөн тэгшитгэлийг $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ суурь дээр бичье. Үүний тулд адилтгал хувиргалт хийе. x_4 хувьсагчийн коэффициентүүдийн до-



17 дугаар зураг.

тор эерэг коэффициент байгаа учир $\min\left(\frac{2}{2}, \frac{3}{3};\right.$ $\left.\ \right)$ ийг олъё. Шийдвэрлэгч элемент болгож нэгдүгээр тэгшитгэл дэх x_4 хувьсагчийн коэффициентийг авъя. Энэ тэгшитгэлээс x_4-ийг олж нөгөө хоёр тэгшитгэлд тавивал

$$x_4 = 1 - \left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_5\right)$$
$$x_2 = 0 - \left(-\frac{3}{2} x_1 - \frac{5}{2} x_5\right)$$
$$x_3 = 1 - \left(-\frac{1}{2} x_1 + \frac{3}{2} x_5\right)$$

систем үүснэ. Эдгээр тэгшитгэлийг ажвал $\mathbf{P}_0$ вектор $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ суурь дээр $\mathbf{P}_0 = 0 \cdot \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4$ гэж бичиг-дэх ажээ. Энэ тохиолдолд $\mathbf{P}_0$ вектор $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ векторүү дээр тодорхойлогдох суурь хавтгай дээр оршиж уч-раас бөхөх үзэгдэл явагдаж байна. Иймд $\mathbf{P}_0$ вектор $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ векторүүд дээр байгуулсан параллелепипе-дийн талс дээр оршино (17 в дүгээр зураг). Хэрэв бид адилтгал хувиргалтын дүрмийг зөрчсөн ахул $\mathbf{P}_0$ век-торийг суурь векторүүдийн сөрөг биш коэффициент-тэй шугаман эвлүүлэг болгон бичиж үл болох тийм суурьт шилжих байсан гэдгийг анхааруулъя. Жишээ нь хэрэв шийдвэрлэгч элемент болгож min $\left(\frac{2}{2};\ \frac{3}{3};\ \frac{2}{1}\right)$-д тохирох элементийг биш харин гуравду-гаар тэгшитгэл дэх x_4-ийн коэффициентийг авч зохи дүрмээр уул системээ хувиргавал

$$x_4 = 2 - (x_3 + 2\ x_5)$$
$$x_1 = -2 - (-2\ x_3 - 3\ x_5)$$
$$x_2 = -3 - (-3\ x_3 - 7\ x_5)$$ систем гарна.

$\mathbf{P}_0$ вектор $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ суурь дээр сөрөг коэффициен агуулсан $\mathbf{P}_0 = -2\ \mathbf{P}_1 - 3\ \mathbf{P}_2 + 2\ \mathbf{P}_4$ сөрөг шугаман эв-лүүлэг болон задрах ба уул систем

$$x_1 = -2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2,\ x_5 = 0$$

гэсэн эерэг биш шийдтэй байна гэдгийг сүүлчийн сис-темээс гаргаж авч болно. Энэ тохиолдолд $\mathbf{P}_0$ векто $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ векторүүд дээр байгуулсан параллелепип-дийг нэвтлэн өнгөрөхгүй (17 г дугаар зураг).

Тийнхүү адилтгал хувиргалтын дүрмийг зөрчих н сөрөг суурьд хүргэж болох ажээ.

Адилтгал хувиргалтаар «давтагдах» үзэгдэлд хү гэж болох тэгшитгэлийн систем авч үзье:

$$x_1 = 0 - (x_4 - x_5 - x_6 + 3\ x_7)$$
$$x_2 = 0 - \left(2\ x_4 - x_5 - \frac{1}{2}\ x_6 + x_7\right)$$
$$x_3 = 1 - (x_4 + x_5 + 3\ x_6 - 8\ x_7)$$

Системийн хувиргалтыг гуравдугаар тэгшитгэлийнх нь хувьд авч үзье. Энэ тэгшитгэлийн x_4-ийн коэффициент эерэг бөгөөд нэгтэй тэнцүү байна. $\left(\frac{0}{1},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{1}\right)$ харьцаануудын минимумын нэг нь нэгдүгээр харьцаа байна. Иймд шийдвэрлэгч элемент болгож нэгдүгээр тэгшитгэлийн x_4-ийн коэффициентийг авч болно. Нэг-дүгээр тэгшитгэлээс x_4-ийг олж, түүний илэрхийллийг үлэх хоёр тэгшитгэлд тавивал

$$x_4 = 0 - (x_1 - x_5 + x_6 + 3\ x_7)$$
$$x_2 = 0 - \left(-2\ x_1 + x_5 + \frac{3}{2}\ x_6 - 5\ x_7\right)$$
$$x_3 = 1 - (-x_1 + 2\ x_5 + 4\ x_6 - 11\ x_7)$$

гэсэн хувирсан систем үүснэ. Энэ системийн сүүлчийн тэгшитгэлийн баруун талд бас л эерэг коэффициентүүд байна. Жишээ нь x_5-ын коэффициентийг зааж болох юм. Энэ тохиолдолд $min\left(\frac{0}{1},\ \frac{1}{2}\right)$ хоёрдугаар тэгшитгэлд тохирох учраас тэрхүү тэгшитгэлийн x_5-ын коэффи-циентийг шийдвэрлэгч элемент болгон авч болно. Энэ-хүү шинэ шийдвэрлэгч элементэд тохирсон адилтгал хувиргалт хийсний дүнд

$$x_5 = 0 - \left(-2\ x_1 + x_2 + \frac{3}{2}\ x_6 - 5\ x_7\right)$$
$$x_4 = 0 - \left(-x_1 + x_2 + \frac{1}{2}\ x_6 - 2\ x_7\right)$$
$$x_3 = 1 - (-3\ x_1 - 2\ x_2 + x_6 - x_7)$$

систем үүснэ. Энэ системийн гуравдугаар тэгшитгэ-лийн баруун талд x_6-гийн коэффициент эерэг байгаа бөгөөд хоёрдугаар тэгшитгэлийн x_6-гийн коэффициен-тийг шийдвэрлэгч элемент болгон авч адилтгал хувир-галтыг гүйцэтгэвэл

$$x_6 = 0 - (2\ x_1 + 2\ x_2 + 2\ x_4 - 4x_7)$$
$$x_5 = 0 - (x_1 - 2\ x_2 - 3\ x_4 + x_7)$$
$$x_3 = 1 - (5\ x_1 - 4\ x_2 - 2\ x_4 + 3x_7)$$

систем гарна. Тухай бүр гуравдугаар тэгшитгэл дэх аль нэг эерэг коэффициентийг сонгон авч доогуур н зуран, түүнд тохирох шийдвэрлэгч элементийг тод ус гээр тэмдэглэж адилтгал хувиргалтыг дэс дараала үйлдвэл анхны системийн, янз бүрийн хувийн эерэ суурь дээрх илэрхийлэл гарна.

$$\left.\begin{aligned} x_7 &= 0-(x_1-2\ x_2-3\ x_4+x_5) \\ x_6 &= 0-(2\ x_1-6\ x_2-10\ x_4+4\ x_5 \\ x_3 &= 1-(2\ x_1+2\ x_2+7\ x_4-3\ x_5) \end{aligned}\right\}$$

$$=$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0-(-3\ x_2-5\ x_4+2\ x_5+\frac{1}{2}x_6) \\ x_7 &= 0-(x_2+2\ x_4-x_5-\frac{1}{2}\ x_6) \\ x_3 &= 1-(8\ x_2+17\ x_4-7\ x_5-x_6) \end{aligned}\right\}$$

$$=$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0-(x_4-x_5-x_6+3\ x_7) \\ x_2 &= 0-(2\ x_4-x_5-\frac{1}{2}\ x_6+x_7) \\ x_3 &= 1-(x_4+x_5+3\ x_6-8\ x_7) \end{aligned}\right\}$$

Ийнхүү адилтгал хувиргалтыг зургаа дахин үйлд сэний дүнд анхны системд буцаж ирлээ.

Тийнхүү адилтгал хувиргалтын

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\to\mathbf{P}_4\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\to\mathbf{P}_5\mathbf{P}_4\mathbf{P}_3\to\mathbf{P}_6\mathbf{P}_5\mathbf{P}_3\to\mathbf{P}_7\mathbf{P}_6\mathbf{P}_3\to$$
$$\to\mathbf{P}_1\mathbf{P}_7\mathbf{P}_3\to\mathbf{P}_1\mathbf{P}_5\mathbf{P}_3$$

сууриуд дахь дараалал давтагдах үзэгдэлд хүргэс ажээ.

Ер нь бөхөх үзэгдэл давтагдах үзэгдэлд хүрг нь тэр бүр алба биш гэдгийг дараах жишээгэ үзүүлье:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0-(x_4-2x_5+4x_6+x_7-3x_8+x_9) \\ x_2 &= 0-(2x_4-x_5+x_6-2x_7-2x_8+4x_9) \\ x_3 &= 0-(-x_4+2x_5-3x_6+3x_7-4x_8+x_9) \\ 0 &= 1-(\underline{\underline{3x_4}}-x_5-2x_6+x_7-x_8+x_9) \end{aligned}$$

Сүүлчийн тэгшитгэлийн x_4-ийн коэффициент эер байгаа учир нэгдүгээр тэгшитгэл дэх x_4 -ийн коэфф циентийг шийдвэрлэгч элемент болгон авч болно.

Адилтгал хувиргалт үйлдсэний дараа

$$\begin{aligned} x_4 &= 0-(x_1-2x_5+4x_6+x_7-3x_8+x_9) \\ x_2 &= 0-(-2x_1+3x_5-7x_6-4x_7+4x_8+2x_9) \\ x_3 &= 0-(x_1+x_6+4x_7-7x_8+2x_9) \\ 0 &= 1-(-3x_1+\underline{\underline{5x_5}}-14x_6-2x_7+8x_8-2x_9) \end{aligned}$$

систем үүснэ. Ийм хувиргалтыг цаашид үргэлжлүүлээл эхлээд

$$x_5 = 0-\left(-\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{7}{3}x_6-\frac{4}{7}x_7+\frac{4}{3}x_8+\frac{2}{3}x_9\right)$$
$$x_4 = 0-\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_6-\frac{5}{3}x_7-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}x_8+\frac{7}{3}x_9\right)$$
$$x_3 = 0-(x_1+x_6+4x_7-7x_8+2x_9)$$
$$0 = 1-\left(\frac{1}{3}x_1-\frac{5}{3}x_2-\frac{7}{3}x_6+\underline{\underline{\frac{14}{3}x_7}}+\frac{4}{3}x_8-\frac{16}{3}x_9\right)$$

систем, дараа нь

$$x_7 = 0-\left(\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_6-\frac{7}{4}x_8+\frac{2}{4}x_9\right)$$
$$x_5 = 0-\left(-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3-\frac{6}{3}x_2-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{3}x_8-\frac{4}{3}x_9\right)$$
$$x_4 = 0-\left(\frac{1}{12}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{5}{12}x_3-\frac{3}{12}x_6-\frac{39}{12}x_8+\right.$$
$$\left.+\frac{38}{12}x_9\right)$$
$$0 = 1-\left(-\frac{10}{12}x_1-\frac{5}{3}x_2-\frac{14}{12}x_3-\frac{42}{12}x_6+\right.$$
$$\left.+\frac{114}{12}x_8-\frac{92}{11}x_9\right)$$

систем тус тус үүснэ. Сүүлчийн системийн эцсийн тэгшитгэл дэх x_6-гийн коэффициент эерэгээс гадна шийдвэрлэгч элемент болж чадах тул тоо томшгүй

олон адилтгал хувиргалт байж болох боломжгүй б
лой. Тийнхүү бөхөх үзэгдэл давтагдах үзэгдэлд хү
гэж чадсангүй. $a_{48} = \frac{114}{12}$ шийдвэрлэгч элементэд т
хирох адилтгал хувиргалтыг үйлдэж, үндсэн биш хув
сагчдын холбогдлыг тэгтэй тэнцүүлбэл анхны сист
мийн нэг үндсэн шийд олдоно:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_9 = 0$$

$$x_4 = \frac{13}{18}; \quad x_5 = \frac{4}{38}; \quad x_7 = \frac{7}{38}, \quad x_8 = \frac{4}{38}$$

Давтагдах үзэгдэл, шугаман тэгшитгэлийн систе
мийн коэффициентүүд олон тооны нөхцөл хангахы
шаарддаг ба коэффициентуудыг нарийн чанд сонго
авсны дүнд давтагдах үзэгдэл гарч болдог учир да
тагдах үзэгдлийг харуулж чадах жишээ зохиох нь ма
төвөгтэй гэдгийг тэмдэглэх нь зүй.

Зөвхөн

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 - (a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \sum_{j=5}^{n} a_{1j}x_j \\ x_2 &= b - (a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \sum_{j=5}^{n} a_{2j}x_j \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

гэсэн хоёрхон тэгшитгэлийн систем байх үед давта
дах үзэгдэл байж үл болно гэдгийг харуулъя. Э
системд тохирох векторүүдын матриц нь

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_j \end{array}$$
$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{1j} \\ 0 & 1 & b & a_{23} & a_{24} & a_{2j} \end{Vmatrix}$$

дүрстэй байх ба $b>0$ байвал $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ векторүүд суу
үүсгэнэ. $\mathbf{P}_3$ векторийн байгуулагчдын утгыг энэ суу
дээр

$$a_{13} = \begin{vmatrix} a_{13} & 0 \\ a_{23} & 1 \end{vmatrix}; \qquad a_{23} = \begin{vmatrix} 1 & a_{13} \\ 0 & a_{23} \end{vmatrix}$$

тодорхойлогчоор илэрхийлж болно. Хэрэв a_{23}, a_{13}-
тэгээс их гэж үзвэл, a_{13} элементийг шийдвэрлэгч эл
ментэд тооцон $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ сууриас $\mathbf{P}_3$ $\mathbf{P}_4$ суурьт шилж
адилтгал хувиргалтыг (19) систем дээр хийж болн
Шинэ $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2$ суурь дээр (19) системийн коэффицие
түүд өмнөх бүлгийн (7) томьёогоор тодорхойлогд
утгатай байна. Жишээ нь x_4 хувьсагчийн коэффицие
тийн утга

Нэгдүгээр тэгшитгэлийн хувьд $\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{14} & 0 \\ a_{24} & 1 \end{vmatrix}$

Хоёрдугаар тэгшитгэлийн хувьд $\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$

дүрстэй байна. Үүнд: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{13} & 0 \\ a_{23} & 1 \end{vmatrix}$ Хэрэв эдгээр илэрхийллийн хүртвэрүүд нь эерэг байх ахул x_4-ийн коэффициент $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2$ суурь дээр эерэг байх бөгөөд (19) системд тохирох хамгийн бага харьцаа нь дахин нэгдүгээр тэгшитгэлд оногдох тул нэгдүгээр тэгшитгэлийн x_4-ийн коэффициентийг шийдвэрлэгч элементэд тооцон, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2$ сууриас $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_2$ суурьт шилжих замаар уул системийг адилтгалаар хувиргаж болно.

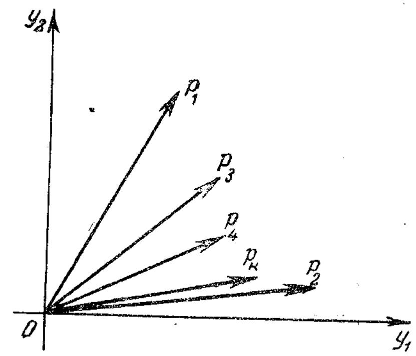
Сууриудын

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_4\mathbf{P}_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathbf{P}_k\mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$$

дараалал давтагдах үзэгдэл үүсгэж болохоор адилтгал хувиргалт үйлдэж болох юм гэж санавал дараах дараалал дахь тодорхойлогч бүр заавал эерэг байх ёстой.(Доод эгнээний тодорхойлогчид хоёрдугаар тэгшитгэлийн эерэг коэффициентүүдийн дараалалд харгалзах ба дээд эгнээний тодорхойлогчид шийдвэрлэгч элементүүдэд харгалзана).

$$\begin{array}{ccccccccc} (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) & & (\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2) & & (\mathbf{P}_4\mathbf{P}_2) & \ldots & (\mathbf{P}_{k-1}\ \mathbf{P}_2) & (\mathbf{P}_k\ \mathbf{P}_2) & (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) \\ & (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3) & & (\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4) & & \ldots & (\mathbf{P}_{k-2},\mathbf{P}_{k-1}) & (\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{P}_k) & (\mathbf{P}_k\mathbf{P}_1) \end{array} \quad (20)$$

Бидний авч үзэж буй тохиолдолд $\mathbf{P}_j$ нь хоёр хэмжээст вектор тул (20) дараалал дахь тодорхойлогч бүрийн утга хэмжээ ба тэмдэгээ тохирох векторүржвэртэйгээ адилхцана. Тэгвэл (20) дахь бүх тодорхойлогч эерэг байх шаардлага нь $\mathbf{P}_3$ вектор хоорондоо хурц өнцөг үүсгэсэн $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ векторуудын хооронд, $\mathbf{P}_4$ вектор $\mathbf{P}_3$,



18 дугаар зураг

$\mathbf{P}_2$ векторуудын хоорондод орших мэтчилэнгээр век-
торууд байрласан байх шаардлагатай ижил юм. Хэрэв
ийм шаардлага тавивал $\mathbf{P}_1$ вектор $\mathbf{P}_k$, $\mathbf{P}_2$ векторуудын
хооронд байрлахад хүрнэ. Энэ нь боломжгүй болой.
(18 дугаар зураг). Энэхүү зөрчлийг аналитик аргаар
бас хялбархан илрүүлж болно.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_3 &= \alpha_{31}\ \mathbf{P}_1 + \alpha_{32}\mathbf{P}_2 \\
\mathbf{P}_4 &= \alpha_{43}\ \mathbf{P}_3 + \alpha_{42}\mathbf{P}_2 \\
\mathbf{P}_5 &= \alpha_{54}\ \mathbf{P}_4 + \alpha_{52}\mathbf{P}_2 \qquad (21) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{P}_k &= \alpha_{k\,k-1}\mathbf{P}_{k-1} + \alpha_{k2}\mathbf{P}_2 \\
\mathbf{P}_1 &= \alpha_{1k}\ \mathbf{P}_k + \alpha_{12}\mathbf{P}_2
\end{aligned}$$

гэсэн вектор тэнцэтгэлүүдийн систем бичиж тэнцэт-
гэл тус бүрийг баруун талаас нь $\mathbf{P}_2$ вектороор, зүүн та-
лаас нь тэнцэтгэл тус бүрийн баруун талд орсон хоёр
дугаар вектороор, тус тус вектор үржүүлбэл вектор
үржвэр бүр эерэг байна гэж үзсэн учраас (21) дахь бү
коэффициентүүд эерэг байна гэдэгт үнэмшиж болно
Жишээлбэл: $\mathbf{P}_3 = \alpha_{31}\mathbf{P}_1 + \alpha_{32}\mathbf{P}_2$ тэгшитгэлээс $(\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2) =$
$= \alpha_{31}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) + \alpha_{32}(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2)$ гарах ба эндээс $\alpha_{31} > 0$ байх н
илт байна. Энэ тэгшитгэлээ зүүн талаас нь $\mathbf{P}_1$-ээр үр
жүүлбэл $\alpha_{32} > 0$ байх нь бас илт болно. Цаашид $\mathbf{P}_k$-гийн
илэрхийлэлд $\mathbf{P}_{k-1}$-ийн илэрхийллийг тавьж гарса
илэрхийлэлд нь $\mathbf{P}_{k-2}$-ын илэрхийллийг тавих мэтчи
лэн үйлдэл хийсний дүнд $\mathbf{P}_k = \gamma_{1k}\mathbf{P}_1 + \gamma_{2k}\mathbf{P}_2$ гарах б
$\gamma_{1k} > 0$, $\gamma_{2k} > 0$ байна. Эндээс $\mathbf{P}_1 = \frac{1}{\gamma_k}\ \mathbf{P}_k - \frac{\gamma_{2k}}{\gamma_{1k}}\mathbf{P}$

болно.

Ийнхүү гарсан тэнцэтгэлийг (21) системийн сүү
чийн

$$\mathbf{P}_1 = \alpha_{1k}\mathbf{P}_k + \alpha_{12}\mathbf{P}_2 \qquad \alpha_{1k} > 0,\ \alpha_{12} > 0$$

тэнцэтгэлтэй жишиж үзвэл зөрчил гарч байна.

Тэгшитгэлийн тоо $n(n > 2)$ хичнээн ч байх үед да
тагдах үзэгдэл гаргаж авахын тулд зургаагаас цөө
гүй адилтгал хувиргалт хийх хэрэгтэй болохыг үзүүлн
Бид зөвхөн нэг удаагийн солилтоор үүсэх суурьуд
авч үзэж байсан болохоор 2 $k(k = 1, 2, 3, \ldots)$ хуви
галтын дараа анхны суурьт буцаж ирж болох ю
$k = 1$ үед анхны суурьт буцаж ирэх боломжгүй. Уч
нь энэ тохиолдолд харгалзах тодорхойлогчид

$$(\mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_i \ldots P_r);(\mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_j \ldots \mathbf{P}_2);\ (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_i \ldots \mathbf{P}_r)$$

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_i \ldots \mathbf{P}_j);\ (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_j \ldots \mathbf{P}i)$$

урстэй байх ба сүүлчийн хоёр тодорхойлогчийн нэг
нь нөгөөгөөсөө $\mathbf{P}_i$ ба $\mathbf{P}_j$ векторуудийн байрыг нэг
удаа сольсны дүнд үүссэн учир эсрэг тэмдэгтэй байх
ёстой. Энэ нь эдгээр тодорхойлогчид эерэг байх ёс-
той гэдэгт харшилж байна.

$k = 2$ байх үед давтагдах үзэгдэл байж болохгүй
гэдгийг нотлохын тулд дор дурдсан адилтгал хувир-
галтуудын аль нь ч байж болохгүйг үзүүлэх хэрэг-
тэй.

1. $(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i1} \ldots \mathbf{P}_{i2}\ \mathbf{P}_r) \to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j1} \ldots \mathbf{P}_{i2} \ldots \mathbf{P}_r) \to$
$\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j2} \ldots \mathbf{P}_{i2} \ldots \mathbf{P}_r) \to$
$\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j3} \ldots \mathbf{P}_{i2} \ldots \mathbf{P}_r) \to$
$\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i1} \ldots \mathbf{P}_{i2} \ldots \mathbf{P}_r);$

2. $(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i1} \ldots \mathbf{P}_{i2} \ldots \mathbf{P}_{i2} \ldots \mathbf{P}_r) \to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j1} \ldots \mathbf{P}_{i2} \ldots \mathbf{P}_i) \to$
$\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j1} \ldots \mathbf{P}_{j2} \ldots \mathbf{P}_r) \to$
$\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j1} \ldots \mathbf{P}_{i1} \ldots \mathbf{P}_r) \to$
$\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i2} \ldots \mathbf{P}_{i1} \ldots \mathbf{P}_r) \to$

3. $(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i1} \ldots \mathbf{P}_{i2} \ldots \mathbf{P}_r) \to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j1} \ldots \mathbf{P}_{i2} \ldots \mathbf{P}_r) \to$
$\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j1} \ldots \mathbf{P}_{j2} \ldots \mathbf{P}_r) \to$
$\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i1} \ldots \mathbf{P}_{j2} \ldots \mathbf{P}_r) \to$
$\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i1} \ldots \mathbf{P}_{i2} \ldots \mathbf{P}_r).$

Нэг сууриас нөгөө суурьт шилжих нэгдүгээр зам,
хоёр тэгшитгэлийн тохиолдолд шилжих учир ямар ч
боломжгүй.

Хоёр дахь зам бас боломжгүй. Учир нь анхны ба
сүүлчийн тодорхойлогчид бие биеэс нэг сэлгэлтээр
ялгаатай болохоор хоёул эерэг байж чадахгүй.

Одоо гурав дахь зам боломжгүй гэдгийг л үзүү-
лэх үлдлээ. Үүний тулд

$$\begin{array}{c}
1 \ldots i_1 \ldots i_2 \ldots r \\
\left|\begin{array}{cccc} 1 & a_{1j_1} & & \\ & a_{i_1j_1} & & \\ & a_{i_2j_1} & 1 & \\ & a_{rj_1} & & 1 \end{array}\right|
\end{array};
\quad
\begin{array}{c}
1 \ldots i_1 \ldots i_2 \ldots r \\
\left|\begin{array}{cccc} 1 & a_{1j_1} & a_{1j_2} & \\ & a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \\ & a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \\ & a_{rj_1} & a_{rj_2} & 1 \end{array}\right|
\end{array};
\quad
\begin{array}{c}
1 \ldots i_1 \ldots i_2 \ldots r \\
\left|\begin{array}{cccc} 1 & & a_{1j_2} & \\ & 1 & a_{i_1j_2} & \\ & & a_{i_2j_2} & \\ & & a_{rj_2} & 1 \end{array}\right|
\end{array};$$

$$\begin{array}{c} 1 \ldots i_1 \ldots i_2 \ldots r \\ \begin{vmatrix} 1 & & & a_{1j_1} \\ & 1 & & a_{i_1j_1} \\ & & 1 & a_{i_2j_1} \\ & & & a_{rj_1} \end{vmatrix} \end{array}; \quad \begin{array}{c} 1 \ldots i_1 \ldots i_2 \ldots r \\ \begin{vmatrix} 1 & a_{1j_1} & & a_{1j_2} \\ & a_{i_1j_1} & & a_{j_1j_2} \\ & a_{i_2j_1} & 1 & a_{i_2j_2} \\ & a_{rj_1} & & a_{rj_2} \end{vmatrix} \end{array};$$

$$\begin{array}{c} 1 \ldots i_1 \ldots i_2 \ldots r \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i_1 \\ \vdots \\ i_2 \\ \vdots \\ r \end{array} \begin{vmatrix} 1 & a_{1j_1} & a_{1j_2} & \\ & a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & 1 \\ & a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \\ & a_{rj_1} & a_{rj_2} & \end{vmatrix} \end{array}; \quad \begin{array}{c} 1 \ldots i_1 \ldots i_2 \ldots \ldots r \\ \begin{vmatrix} 1 & & a_{1j_2} & \\ & 1 & a_{i_1j_2} & \\ & & a_{i_2j_2} & 1 \\ & & a_{rj_2} & \end{vmatrix} \end{array}.$$

r эрэмбийн бүх тодорхойлогчдыг эерэг гэж үзв зөрчилд орохыг шалгаж үзье.

Эдгээр долоон тодорхойлогчийг задалбал:

1) $a_{i_1j_1} > 0$; 4) $a_{i_1j_1}a_{rj_2} - a_{rj_1}a_{i_1j_2} >$

2) $a_{rj_1} > 0$: 5) $a_{ij_2} > 0$;

3) $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2} - a_{i_2j_1}a_{i_1j_2} > 0$ 6) $a_{i_2j_2}a_{rj_1} - a_{rj_2}a_{i_2j_1} <$

7) $a_{rj_2} < 0$.

1), 2), 4), 7), тэнцэтгэл бишүүдээс $a_{i_1j_2} < 0$, 2), 5 6), 7) тэнцэтгэл бишүүдээс $a_{i_2j_1} < 0$ болохыг мэдэ болно.

$$a_{i_1j_1} = \varepsilon, \qquad a_{rj_2} = -\eta,$$
$$a_{rj_1} - k\varepsilon, \qquad a_{i_1j_2} = -k_1\eta,$$
$$a_{i_2j_2} = q\varepsilon, \qquad a_{j_2j_1} = -q_1\eta.$$

гэж тус тус тэмдэглээ. Үүнд: ε, k, q, η, k, q нь эер тоонууд болой.

Тэгвэл 3) аас$\searrow \varepsilon q\varepsilon - k_1q_1\eta^2 > 0 \mid q\varepsilon^2 - k_1q_1\eta^2 > 0$;

4) өөс— $\varepsilon\eta + k_1k\varepsilon\eta > 0 \mid kk_1 - 1 > 0$,

6) гаас$\nearrow$ $q_1\eta^2 - kq\varepsilon^2 > 0 \mid q_1\eta^2 - kq\varepsilon^2 > 0$,

тэнцэтгэл бишүүд гарах ба цаашид

$$\frac{\begin{array}{c} q\,\varepsilon^2 > k_1q_1\eta^2, \\ q_1\eta^2 > kq\varepsilon^2 \end{array}}{qq_1\,\varepsilon^2\eta^2 > k_1kq_1q_2\,\varepsilon^2\eta^2,\ 1 > k_1k.}$$

болох нь илт байна. k_1, $k < 1$ тэнцэтгэл бишийг үүний өмнөхөн гарсан $k_1k_2 > 1$ тэнцэтгэл биштэй зэрэгцүүлж үзвэл зөрчил гарах нь илт бизээ.

Ийнхүү зургаагаас доошгүй тооны адилтгал хувиргалт хийсний дараа давтагдах үзэгдэл явагдаж болох талтай юм байна.

8 §. Алгебрын шугаман тэгшитгэлийн системийн сөрөг биш шийдийг тодорхойлох арга

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\} \quad (13)$$

гэсэн n хувьсагч бүхий m шугаман тэгшитгэлийн систем өгөгджээ. $b_i \geqslant 0$ гэж үзэх нь асуудлыг үл хязгаарлана. (Хэрэв b_i сөрөг байвал тэр тэгшитгэлийн хоёр талыг -1-ээр үржүүлж эерэг болгож болно.

(13) системийг

$$0 = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right), \qquad i = 1,\ 2, \ldots, n \qquad (22)$$

дүрстэй бичье. Хэрэв (22) системийн ямар нэг хувьсагч зөвхөн ганц тэгшитгэлд орсон бөгөөд энэ хувьсагчийн хаалтанд орсон үеийн коэффициент нь «+» тэмдэгтэй байвал тэр тэгшитгэлийг энэ хувьсагчийнх нь хувьд бодож олно.

(22) системийн тэгшитгэлүүд ийм хувьсагчийнхаа хувьд бодогдсон гэж санаа. Тэгвэл тэдгээр хувьсагчийг зохих ёсоор дугаарласны дараа өгөгдсөн систем

$$x_1 = b_1 - (a_{1\,l_0+1}x_{l_0+1} + a_{1\,l_0+2}x_{l_0+2} + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1k}x_k),$$
$$x_2 = b_2 - (a_{2\,l_0+1}x_{l_0+1} + a_{2\,l_0+2}x_{l_0+2} + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2k}x_k),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4*

$$x_{l_0} = b_{l_0} - (a_{l_0 l_{0+1}} + a_{j_0 l_{0+2}} x_{l_{0+2}} + \ldots + a_{l_0 j} x_j + \ldots + a_{l_{0k}} x_k)$$
$$0 = b_{l_{0+1}} - (a_{l_{0+1}, l_{0+1}} x_{l_{0+1}} + a_{l_{0+1}, l_{0+2}} x_{l_{0+2}} + \ldots + a_{l_{0+1}, j} x_j + \ldots + a_{l_{0+1k}} x_k)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = b_m - (a_{m, l_{0+1}} x_{l_{0+1}} + a_{m, l_{0+2}} x_{l_{0+2}} + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mk} x_k)$$

дүрст шилжинэ. Эсвэл товчоор

$$\left.\begin{aligned} x_l &= b_l - \Big(\sum_{j=l_0+1}^{k} a_{lj} x_j\Big), \\ 0 &= b_\gamma - \Big(\sum_{j=l_0+1}^{k} a_{\gamma j} x_j\Big), \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

хэмээн бичиж болно. Үүнд:

$$l = 1,2,\ldots, l_0;\ \gamma = 1,2,\ldots,\gamma_0;$$
$$l_0 + \gamma_0 = m;\ l_0 + k = n;\ b_l \geqslant 0;\ b_\gamma \geqslant 0$$

(23) систем дэх аль нэг үл мэдэгдэхийнхээ хувьд бодогдоогүй тэгшитгэл бүрийг 0 тэгшитгэл гэж нэрлэе.

Тийнхүү алгебрын шугаман тэгшитгэлийн ямар ч системийг (23) дүрст оруулж болох ажээ[1].

(23) системийн сөрөг биш шийдийг олох зорилгоор доор дурдсан нөхцөлүүдийг хангаж чадах адилтгал хувиргалт хийе.

1. Сул гишүүн b_j нь тэгээс их байх тийм 0 тэгшитгэлийг эрж олъё. (Хэрэв тийм 0 тэгшитгэл байхгүй бол

$$x_l = b_l\ \ x_j = 0\ (l = 1,2,\ldots, l_0,\ j = l_0+1,\ldots, k)$$

утгууд (23) системийн сөрөг биш шийд байна) Тийм тэгшитгэл нь i дугаар тэгшитгэл болог.

2. i дугаар тэгшитгэлийн a_{ij}, эерэг коэффициентийг сонгон авья[2].

3. a_{ij} шийдвэрлэгч элементийг олж (23) системийг адилтгалаар хувиргая.

---

[1] Хэрэв (23) системд аль нэг хувьсагчийнхаа хувьд бодогдох нэг ч тэгшитгэл байхгүй бол $l_0 = 0$ байх ба уг систем дан ганц 0 тэгшитгэлүүдээс тогтсон байна.

[2] Хэрэв i дугаар тэгшитгэлд эерэг коэффициент байхгүй бол (23) систем нийцгүй байна. Учир нь $0 = b_i - (\Sigma a_{ij} x_j)$ тэгшитгэлийн $b_i > 0$ бүх $a_{ij} < 0$ болохоор. энэ тэгшитгэлийг хангах $x_j \geqslant 0$ утга үл олдоно.

4. i дугаар тэгшитгэлийг цаашдын хувиргалтад ашиглая. Тэгэхдээ энэ тэгшитгэлд, бусад тэгшитгэлүүдэд ороогүй үл мэдэгдэх гарч ирэх үе хүртэл буюу (23) системийн нийцгүй болохыг тогтоох хүртэл энэ тэгшитгэлийг ашиглана[1]

5. i дугаар 0 тэгшитгэлийг шийдсэний дараа эерэг сул гишүүнтэй өөр нэг 0 тэгшитгэлийг хайн олж, өмнөхтэй төстэй үйлдлийг хийнэ.

6. Энэ үйлдлийг бүх 0 тэгшитгэл барагдах хүртэл гүйцэтгэнэ.

I тайлбар. Бодож олсон хувьсагчийн илэрхийллийг бусад тэгшитгэлүүдэд тавихад зарим тэгшитгэл $0 \equiv 0$ адилтгал болон хувирч болох тул тэрээр системийн бүрэлдэхүүнээс хасагдаж хувирсан систем дэх тэгшитгэлийн тоо m-ээс цөөн байж болно.

II тайлбар: (23) системд буюу эсвэл хувирсан системд ямар нэг хувьсагчийнхаа хувьд бодогдсон бөгөөд сул гишүүн нь тэгтэй тэнцүү, $x_i = 0 - (\Sigma \beta_\varphi x_\varphi)$ байхын гадна баруун талын бүх хувьсагчийн коэффициентүүд сөрөг биш байх тийм тэгшитгэл байх юм гэж санаая. Ийм хувьсагчдын утга тэгээс ялгаатай байж болохгүй. Учир нь x_i сөрөг биш байх ёстой. Иймд эдгээр хувьсагчийн тэг утгуудыг бусад тэгшитгэлүүдэд тавивал өгөгдсөн систем үлэмж хялбарчлагдана. Үүнчлэн сул гишүүн нь тэгтэй тэнцүү, баруун тал дахь хувьсагчдын тэгтэй тэнцүү биш коэффициентүүд нь ижил тэмдэгтэй байх 0 тэгшитгэлүүдийг системийн бүрэлдэхүүнээс хасаж, тэдгээр хувьсагчдын бусад тэгшитгэлүүд дэх утгыг тэгтэй тэнцүүд тооцно.

1—6 нөхцөлийг хангаж чадах адилтгал хувиргалтуудын дараалал ямар дүнд хүргэж болохыг сонирхъё.

а) Төгсгөлтэй тооны адилтгал хувиргалт хийсний дараа өгөгдсөн систем тэг тэгшитгэлээс ангижирч болно. Энэ тохиолдолд (23) систем нийцтэй болох нь илт бөгөөд үндсэн биш хувьсагчдыг тэгтэй тэнцүүлж, үндсэн хувьсагчдыг сул гишүүнтэй нь тэнцүүлж олсон шийд нь 0 тэгшитгэл агуулаагүй системийн сөрөг биш шийд болж чадна.

---

[1] Хэрэв i дугаар тэгшитгэлд эерэг коэффициент байхгүй бол (23) систем нийцгүй байна. Учир нь $0 = b_i - (\Sigma a_{ij}\ x_j)$ тэгшитгэлийн $b_i > 0$, бүх $a_{ij} < 0$ болохоор энэ тэгшитгэлийг хангах $x_i \geqslant 0$ утга үл олдоно.

б) Төгсгөлтэй тооны адилтгал хувиргалт гүйцэт гэсний дараа ашиглаж байсан тэг тэгшитгэл, маан

$$0 = b_i' - \left(\sum a_{ij} x_j\right)$$

дүрстэй болох ба тэгэхдээ $b_i' > 0$, харин бүх j-ийн хувьд $a_{ij} \leqslant 0$ байж болох юм. Энэ тохиолдолд систем нийцгүй байна.

в) Адилтгал хувиргалтыг хичнээн ч хийсэн, өгөгд сөн систем 0 тэгшитгэлээс бүрмөсөн ангижрахгүй то хиолдол байж болно. Адилтгал хувиргалтыг дэс да раалан хийхэд 0 тэгшитгэлийн тоо олшрохгүй учраас зарим нэг 0 тэгшитгэл, баруун талдаа ямагт ядаж нэг эерэг коэффициенттой байх хирнээ шийдвэрлэгч эле мент түүнд хэзээ ч үл харьяалагдах чанартай байж болно. Энэхүү

$$0 = b_i' - \left(\sum a_{ipj}' x_j\right)$$

0 тэгшитгэлийг $y = \frac{b_{ip}'}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\left(\sum a_{ip_j} x_j\right)$ тэгшитгэлээр сольж, энэ тэгшитгэлээ бусад бодогдсон тэгшитгэ лүүдтэй хамтруулан үзвэл в) тохиолдолд давтаг дах үзэгдэл явагдана гэдгийг олж үзэж болно. Үүнд ε нь хичнээн ч бага байж болох эерэг тоо болой.

Яригдсан бүх зүйлүүд, дараах дүгнэлт хийх бо ломж өгч байна.

n хувьсагч бүхий m алгебрын тэгшитгэлийн ямар ч системд адилтгал хувиргалтыг дэс дараалан хийх явдал төгсгөлтэй тооны алхмын дараа (давтагдаг үзэгдэл явагдахаас бусад тохиолдолд) өгөгдсөн сис тем сөрөг биш шийдийн мужид нийцтэй эсэхийг то дорхойлох боломж өгдөг. Хэрэв систем нийцтэй бол хувиргалтын сүүлчийн алхам дээр ямар нэг сөрөг биш шийд гарч ирдэг.

Дурдсан аргын чухал чанар нь түүнийг алгебрын тэгшитгэлийн дурын системд тэгшитгэлүүд нь шуга ман хамааралтай эсэхийг харгалзахгүйгээр ашиглаж болдогт оршино.

Түүнээс гадна шугаман тэгшитгэл бишийн систе мийг нэмэлт сөрөг биш хувьсагч нэмэн оруулах замаар тэнцэтгэлийн системд шилжүүлж болдог тул дээрх аргыг тэнцэтгэл бишийн системийн нийцтэй эсэхийг тодорхойлох, мөн түүний сөрөг биш шийдүүдийн нэ

йг олоход ашиглаж болно. Энэ үед шийдийн олон алстыг „цэврээр“ ялган авах шаардлага бас арилна.

19 дүгээр зураг дээр алгебрын шугаман тэгшитгэ лийн дурын системийн сөрөг биш шийдийг тооцон бо лох электрон машинаар тодорхойлох дамжлага загва рыг харууллаа.

Машинд, эхлээд өгөгдсөн системийн хувьсагчдын коэффициентүүд ба сул гишүүд, мөн хамгийн бага ут гыг нь олбол зохих шугаман хэлбэрийн коэффициен тийг оруулна. Машин, программынхаа дагуу адилтгал хувиргалтыг дэс дараалан үйлдэж систем нийцтэй байх нөхцөлийг шалган үзнэ.

Хэрэв систем нийцгүй байвал энэ тухай машин до холо өгч ажиллагаагаа зогсооно. Хэрэв систем нийцтэй бол машин, сөрөг биш шийдийг тодорхойлж, (хэрэг тэй бол) түүнийг гарган өгөх ба дараа нь зохистой шийдийг олох ажилд орно.

Жишээ авч үзье.

Жишээ.

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2,\\ 1\cdot x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7,\\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2 - (x_1 + 3x_2 + 3x_3)\\ 0 &= 7 - (x_1 + 2x_2 + 4x_3)\\ 0 &= 3 - (-3x_1 + 3x_2 - x_3)\end{aligned}\right\}$$

систем хувьсагчдынхаа сөрөг биш холбогдлын мужид нийцтэй эсэхийг тодорхойл.

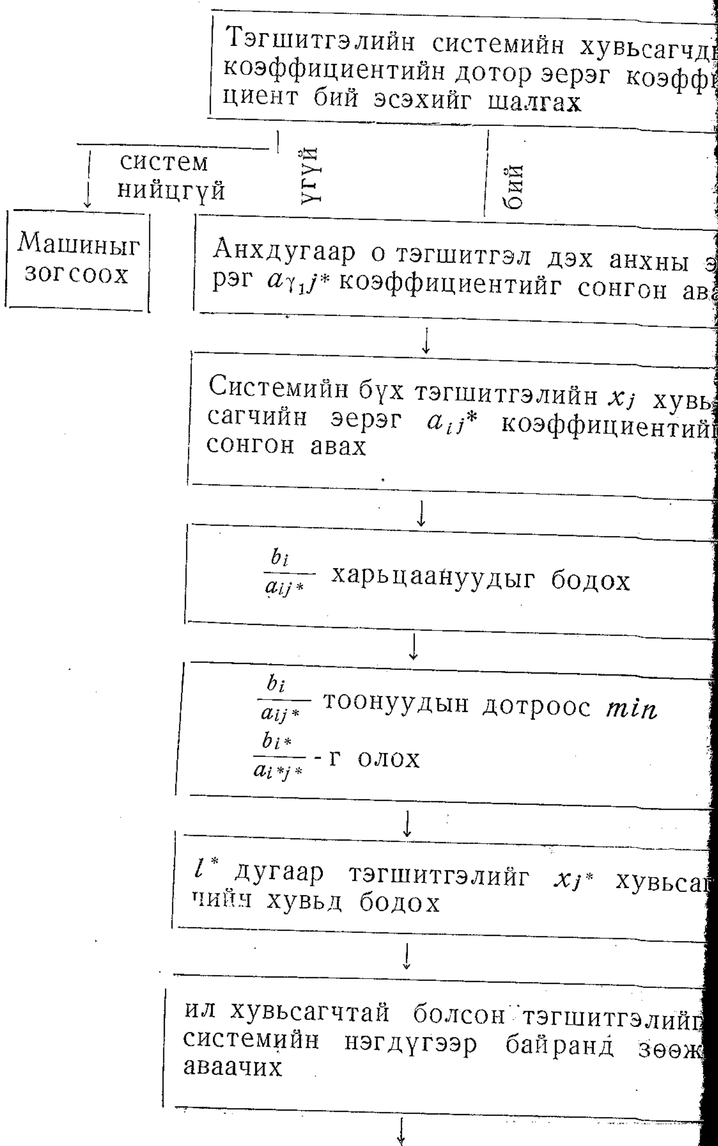
Эхний 0 тэгшитгэл дэх x_1-ийн эерэг коэффициент нь шийдвэрлэгч элемент болж чадна.

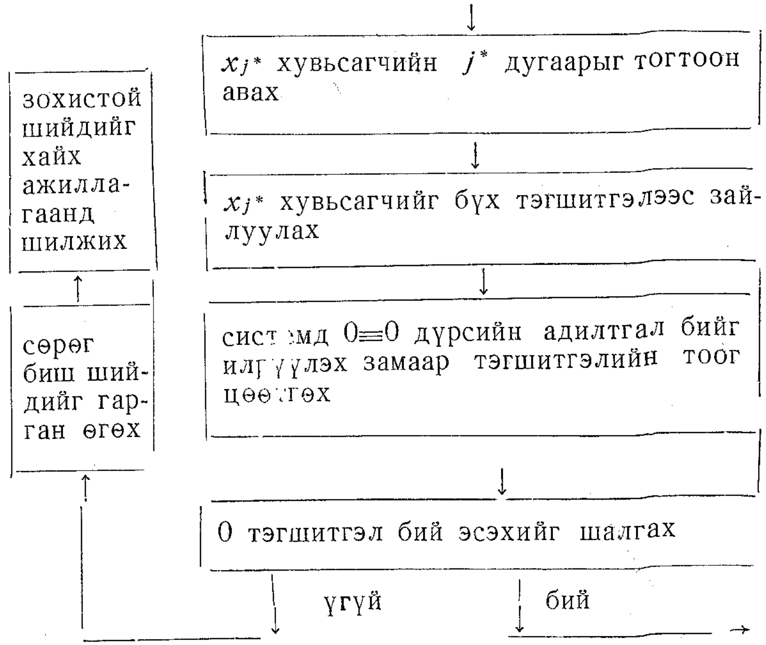
$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - (3x_2 + 3x_3)\\ 0 &= 5 - (-x_2 + x_3)\\ 0 &= 9 - (12x_2 + 8x_3)\end{aligned}$$

Хоёрдугаар 0 тэгшитгэлийн x_3-ийн коэффициент эерэг байгаа болохоор шийдвэрлэгч элемент нэгдүгээр тэгшитгэлд харьяалагдаж байна.

$$x_3 = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3} x_1 + x_2\right)$$

$$0 = \frac{13}{3} - \left(-\frac{1}{3} x_1 - 2x_2\right)$$





19 дүгээр зураг

Сүүлчийн тэгшитгэлийн сул гишүүн нь эерэг болович хаалтанд байгаа хоёр коэффициент хоёул сөрөг учраас хоёрдугаар тэгшитгэлийг хангаж чадах $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ координаттай ганц ч цэг олдохгүй. Иймд өгөгдсөн систем нийцгүй ажээ.

Жишээ.

$$
\begin{aligned}
&0 = 3 - (2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4)\\
1)\quad &0 = 3 - (-2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4)\\
&0 = 6 - (-2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4)
\end{aligned}
$$

системийн сөрөг биш шийдийг олъё.

Адилтгал хувиргалт дэс дараалан хийсний дараа

$$
2)\quad \left.\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x_2 + x_3 + \boldsymbol{x}_4\right)\\
0 &= 6 - (2x_2 + 6x_3 + 4x_4)\\
0 &= 9 - (3x_2 + 9x_3 + 6x_4)
\end{aligned}\right\}
$$

$$
3)\quad \left.\begin{aligned}
x_3 &= 1 - \left(\frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}\boldsymbol{x}_4\right)\\
x_1 &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{3}x_4\right)\\
0 &\equiv 0
\end{aligned}\right\}
$$

системүүд тус тус үүснэ. Өгөгдсөн системийн сөрөг биш шийдүүдийн нэг нь

$$x_1 = \frac{1}{2}, \; x_3 = 1, \; x_2 = 0, \; x_4 = 0$$

болно.

Тэгшитгэлийн системийн сөрөг биш шийдийг олох энэхүү арга нь матрицийн рангийг тодорхойлох аргуудын нэг болж чадна. Учрыг тайлбарлахын тулд

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdot \cdot \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdot \cdot \cdot & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdot \cdot \cdot & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матриц өгөгджээ гэж саная. Энэ матрицийнхаа багануудыг $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \ldots, \mathbf{P}_n$ векторууд гэж үзээд.

$$0 = \mathbf{P}_0 - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \; \mathbf{P}_j \right)$$

тэгшитгэл зохиоё. Үүнд; $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1$ гэж үзье.

Энэ тэгшитгэл сөрөг биш шийдтэй байх нь илт байна. (Жишээлбэл $x_1 = 1$ $x_j = 0$, $j = 2,3, \ldots, n$)

$0 = \mathbf{P}_0 - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{P}_j \right)$ вектор тэгшитгэлийг m тэгшитгэлийн систем дүрстэй болгож, энэ системээ адилтгал хувиргалтаар хувиргаж 0 тэгшитгэлээс ангижруулна. 0 тэгшитгэлүүдийг зайлуулсны дараа үлэх шийдэгдсэн тэгшитгэлүүдийн тоо матрицийн рангийг тодорхойлно. Тэгэхдээ үйлдвэл зохих хувиргалтын тоо матрицийн рангатай тэнцүү байдгийг бас үзүүлж болдог.

Жишээ.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

матрицийн рангийг ол.

Адилтгал хувиргалтыг дэс дараалан үйлдье.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2 - (2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4) \\ 0 &= 1 - (x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5) \\ 0 &= 0 - (\quad\quad x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5) \\ 0 &= 4 - (4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 5x_5 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 - (-2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5) \\ 0 &= 0 - (\quad\quad x_3 + 9x_4 - 4x_5) \\ 0 &= 0 - (\quad\quad x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5) \\ 0 &= 0 - (\quad\quad x_2 \quad\quad + 12x_4 - 3x_5) \end{aligned}\right\} \text{I алхам}$$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 0 - (9x_4 - 4x_5) \\ x_1 &= 1 - (-2x_2 - 13x_4 + 6x_5 \\ 0 &= 0 - (x_2 + 12x_4 - 3x_5) \\ 0 &= 0 - (x_2 + 12x_4 - 3x_5) \end{aligned}\right\} \text{II алхам}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 0 - (12x_4 - 3x_5) \\ x_3 &= 0 - (9x_4 - 4x_5 \\ x_1 &= 1 - 11x_4 \\ 0 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{III алхам}$$

матрицийн ранг $r = 3$ ажээ.

9 §. Шугаман программчлалын бодлогыг бодох

Шугаман программчлалын бодлого нь

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}\,x_n &= b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} (13)$$

...н n хувьсагч бүхий m шугаман тэгшитгэлийн систем, мөн эдгээр хувьсагчаас хамаарсан $f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n$ шугаман хэлбэр өгөгдсөн байх үед (13) системийн бүх боломжтой сөрөг биш $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ шийдүүдийн дотроос f шугаман хэлбэр хамгийн бага утгатай байх тийм $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ шийдийг олоход оршино гэж өмнө томьёолсон билээ.

Энэ бодлогыг бодохын тулд (13) системийн сөрөг биш нэгэн шийдийг өмнөх зүйлд дурдсан аргаар олъё. Тэр аргыг хэрэглэсний дүнд (13) систем өөртэйгөө эн ...үү

$$x_1 = b_1' - (a'_{1\,r+1}x'_{r+1} + a'_{1r+2}x'_{r+2} + \ldots + a'_{1j}x'_j + \ldots$$
$$\ldots + a'_{1\,k}x_k),$$

$$x'_2 = b'_2 - (a'_{2r+1}x'_{r+1} + a'_{2r+2}x'_{r+2} + \ldots + a'_{2j}x'_j + \ldots$$
$$\ldots + a'_{2k}x_k),$$

. . . .

$$x'_i = b'_i - (a'_{ir+1}x'_{r+1} + a'_{ir+2}x'_{r+2} + \ldots + a'_{ij}x'_j + \ldots$$
$$\ldots + a'_{ik}x_k)$$

. . . .

$$x'_r = b'_r - (a'_{rr+1}x'_{r+1} + a'_{rr+2}x'_{r+2} + \ldots + a'_{rj}x'_j + \ldots +$$
$$+ \ldots a_{rk}x_k)$$
$$i = 1,2, \ldots, r;\ r \geqslant m; r + k \leqslant n.$$

системд шилжинэ[1]. Үндсэн хувьсагчдын илэрхийллийг шугаман хэлбэрт тавьж, тогтмол хэмжигдэхүүнүүдийг зохих ёсоор тэмдэглэсний дараа f-ийг

$$f = F - \sum_{j=r+1}^{k} \bar{c}_j^1 x_j^1 \qquad (25)$$

шугаман функц дүрстэй болгож болно.

Симплекс арга ёсоор зохистой шийдийг олохын тулд (24) систем ба (25) шугаман функцийг, адилтгал хувиргалтыг цаашид хэрэглэж болох нөхцөл алдагдах хүртэл адилтгал хувиргалтаар хувиргая. Өөрөөр хэлбэл (25) дахь эерэг коэффициентүүд арилах хүртэл адилтгал хувиргалтаар хувиргая. Энэ бүлгийн эхний хоёр зүйлд дурдсан давтагдах үзэгдэл нь шугаман программчлалын бодлогод бас хамаарах тул дор дурдсан дүгнэлтийг хийж болно.

Тэгшитгэлийн системийн шийдүүдийн дотроос шугаман хэлбэр хамгийн бага утгатай байх сөрөг биш шийдийг төгсгөлтэй тооны адилтгал хувиргалт (давтагдах үзэгдэл байхгүй үед) гүйцэтгэсний дүнд олж болно.

Давтагдах үзэгдэл байх боломжийг арилгах хэдэн хэдэн арга байдаг.

Эдгээр аргуудын зарим нь адилтгал хувиргалт гүйцэтгэх бүрийд, бөхөх үзэгдэл байх үеийнх шиг нэмэлт үйлдэл шаарддаг. Бөхөх үзэгдэл байх үед шийдвэрлэгч элемент нэгэн утгатай тодорхойлогддоггүй. Бөхөх үзэгдэл байх үед адилтгал хувиргалтын алхам бүр

---

[1] Ил хувьсагчдыг зохих ёсоор дугаарласны дараа ийм систем шилжинэ.

шаардагдах нэмэлт үйлдэл нь давтагдах үзэгдлийг арилгаж чадахуйцаар шийдвэрлэгч элементийг сонгон авах боломж өгдөг юм. P_0 вектор нэг буюу хэд хэдэн суурь хэт хавтгайд харьяалагдаж байх үед бөхөх үзэгдэл тохиолдоно гэж бүр дээр тэмдэглэсэн билээ.

Шугаман программчлалын бодлогыг бодсон практик ажиллагааны байдлыг шинжлэн үзвэл давтагдах үзэгдэл явагдах магадлал тун бага болох нь илэрсэн. Харин давтагдах үзэгдэлтэй жишээ зохиоход олон тооны нэмэлт нөхцөл шаардагдах нилээд сүрхий бэрхшээл тулгардаг.

Бодлогыг гар аргаар бодох үед ховор дайралдаж болзошгүй давтагдах үзэгдлийг шууд илрүүлж болдог.

$$x_1 = 0 - (x_3 - x_4 - x_5 + 3x_6)$$
$$x_2 = 0 - (2x_3 - x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6)$$

системийн шийдүүдийн дотроос

$$f = 3 - (x_3 + x_4 + 3x_5 - 8x_6)$$

Шугаман хэлбэр хамгийн бага утгадаа хүрэх сөрөг биш шийдийг олох зорилго тавьж, 44 дүгээр хуудсанд үзүүлсэн жишээтэй адил адилтгал хувиргалт хийвэл, анх авсан үндсэн хувьсагчдаа буцаж ирснээ ажих болно. Хэрэв үүнийг эс ажвал бодлого бодох ажиллагаа хичнээн ч үргэлжилж болох боловч шугаман хэлбэрийн утга тогтмол хэвээр үлдэх болно.

Хэрэв давтагдах үзэгдэл тохиолдвол өөр шийдвэрлэгч элемент сонгон авч адилтгал хувиргалтынхаа дэс дарааг өөрчилнө. Дурдсан жишээгээ энэ аргаар боловсруулбал f шугаман хэлбэр доод талаасаа хязгаарлагдаагүй болох нь дараах байдлаас харагдана.

$$x_1 = 0 - (x_3 - x_4 - x_5 - 3x_6)$$
$$x_2 = 0 - (2x_3 - x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6)$$
$$f = 3 - (\underline{\underline{x_3}} + x_4 + 3x_5 - 8x_6)$$
$$x_3 = 0 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{2}x_6)$$
$$x_1 = 0 - \left(-\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{4}x_5 + \frac{5}{2}x_6\right)$$
$$f = 3 - \left(-\frac{1}{2}x_2 + \underline{\underline{\frac{3}{2}}}x_4 - \frac{13}{4}x_5 - \frac{17}{2}x_6\right)$$

Энэ тохиолдолд x_4-ийн утгыг ихэсгэх замаар шуг
ман хэлбэрийн утгыг багасгаж болно. Учир нь x_4 хув
сагчийн коэффициентийн баганын дотор эерэг коэфф
циент байхгүй, өөрөөр хэлбэл нэг ч шийдвэрлэгч эл
мент байхгүй тул x_4-ийг ихэсгэхэд ямар ч хязгаарла
байхгүй. Иймхүү f функц доороосоо хязгаарлагдаагү
ажээ.

Бодлогыг тооцон бодох электрон машинаар бод
программыг зохиохдоо өмнө дайралдсан бүлэг үндс
хувьсагчтай дахин дайралдах боломжийг бодолцох х
рэгтэй. Давтагдах үзэгдэл илрэх бүрд, үүнийг арилг
нэмэлт үйлдэл бүхий программын хэсгийг машин
оруулбал зохино.

Давтагдах үзэгдлийг арилгах хамгийн хялбар н
мэлт үйлдэл нь давтагдах үзэгдэл илэрсэн алхам дэ
өөр шийдвэрлэгч элемент сонгон авах арга байдаг.

Жишээ. $f=5x_1-10x_2+7x_3-3x_4$ шугаман функци

$$0=\frac{7}{2}-(x_1+x_2+7x_3+2x_4)$$

$$0=\frac{3}{2}-(-2x_1-x_2+3x_3+3x_4)$$

$$0=4-(2x_1+2x_2+8x_3+x_4)$$

системийн сөрөг биш шийдийн олонлог дээрх хамги
бага утгыг ол.

Адилтгал хувиргалтыг зохих ёсоор үйлдвэл:

$$x_2=2-\left(x_1+4x_3+\frac{1}{2}x_3\right)$$

$$0=\frac{3}{2}-\left(-2x_1+3x_3+\frac{3}{2}x_4\right)$$

$$0=\frac{7}{2}-\left(-x_1+7x_3+\frac{7}{2}x_4\right)$$

$$x_3=\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{2}x_4\right)$$

$$x_2=0-\left(\frac{11}{3}x_1-\frac{3}{2}x_4\right)$$

$$0=0-\left(\frac{11}{3}x_1\right)$$ (x_1-ийн утга зөвхөн л 0 бай

$$x_3=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}x_4\right)$$

$$x_2=0-\left(-\underline{\underline{\frac{3}{2}}}x_4\right)$$

$$f=\frac{7}{2}-\left(-\frac{43}{2}x_4\right)$$

$$x_4=1-(2x_3)$$

$$x_2=\frac{3}{2}-(3x_3)$$

$$f=-18-(-43x_3)$$

$x_1=0,\ x_3=0,\ x_4=1,\ x_2=\frac{1}{2}$ байх үед $f=-18$

Жишээ.

$$\begin{aligned}
-20x_1+12x_2-15x_3&\leqslant 60\\
x_1+2x_2-3x_3&\leqslant 6\\
3x_1+6x_2+4x_3&\leqslant 12\\
-20x_1-15x_2+3x_3&\leqslant 60\\
10x_1+5x_2-2x_3&\geqslant 10\\
6x_1+7x_2+42x_3&\geqslant 12
\end{aligned}$$

шугаман тэнцэтгэл бишийн системийн сөрөг биш шийдүүдийн дотроос $f=x_1+x_2+x_3$ шугаман хэлбэр хамгийн бага утгатай байх тийм шийдийг ол.

Бодолт. Тэнцэтгэл бишийн системийг нэмэлт хувьсагчийн тусламжтай

$$\begin{aligned}
y_1&=60-(-20x_1+12x_2-15x_3)\\
y_2&=6-(x_1+2x_2-3x_3)\\
y_3&=12-(3x_1+6x_2+4x_3)\\
y_4&=60-(-20x_1-15x_2+3x_3)\\
0&=10-(10x_1+5x_2-2x_3-y_5)\\
0&=42-(6x_1+7x_2+\underline{\underline{42}}x_3-y_6)
\end{aligned}$$

системд шилжүүлж адилтгал хувиргалтаар хувиргая

$$x=1-\left(\frac{1}{7}x_1+\frac{1}{6}x_2-\frac{1}{42}y_6\right)$$

$$y_1=75-\left(\frac{25}{7}x_1+\frac{87}{6}x_2\frac{15}{42}y_6\right)$$

$$y_2=9-\left(\frac{10}{7}x_1+\frac{5}{2}x_2-\frac{3}{42}y_6\right)$$

$$y_3=8-\left(\frac{17}{7}x_1+\frac{32}{6}x_2+\frac{4}{42}y_6\right)$$

$$y_4=57-\underline{\underline{\frac{143}{7}}}x_1-\frac{93}{6}x_2\frac{3}{42}y_6\Big)$$

$$0=12-\left(\frac{72}{7}x_1+\frac{16}{3}x_2-\frac{2}{42}y_6-y_5\right)$$

$$x_1=\frac{7}{6}-\left(\frac{14}{27}x_2-\frac{7}{72}y_5-\frac{1}{216}y_6\right)$$

$$x_3=\frac{5}{6}-\left(\frac{5}{54}x_2+\frac{1}{72}y_5-\frac{5}{216}y_6\right)$$

$$y_1=95\frac{5}{6}-\left(\frac{1383}{54}x_2-\frac{665}{1512}y_6-\frac{125}{72}y_5\right)$$

$$y_2=7\frac{1}{3}-\left(\frac{95}{27}x_2-\frac{10}{72}y_5-\frac{14}{216}y_6\right)$$

$$y_3=5\frac{1}{6}-\left(\frac{220}{54}x_2+\frac{17}{72}y_5+\frac{161}{1512}y_6\right)$$

$$y_4=80\frac{5}{6}-\left(-\frac{265}{54}x_2-\frac{143}{72}y_5-\frac{35}{1512}y_6\right)$$

Тэнцэтгэл бишийн системийн сөрөг биш шийдүүдийн нэг нь $x_1=\frac{7}{6}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{5}{6}$ юм. Одоо шугаман хэлбэрээ үндсэн биш хувьсагчдаар илэрхийлье. $f=2-$ $-\left(-\frac{7}{18}x_2-\frac{1}{12}y_5-\frac{1}{36}y_6\right)$

Шугаман хэлбэрийн сүүлчийн энэ илэрхийллээс үзэ хэд түүнийг хувьсагчийнх нь сөрөг биш утгуудын муж дээр цаашид багасгах боломжгүй нь харагдаж байна

Иймучраас $x_1=\frac{7}{6}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{5}{6}$ гэсэн анхн шийд нь зохистой бөгөөд шугаман хэлбэрийн үүн тохирох утга нь $f_{min}=2$ байх болно.

10 §. Минимаксын нэгэн бодлогын тухай

m хэмжээст n ширхэг P_j вектор мөн эдгээрт хар галзсан t_j бодит тоонуудын олонлог $T=\{t_j\}$ өгөгд жээ. $j=1, 2, \dots, n$

$$x_1P_1+x_2P_2+\dots+x_nP_n=P_0$$

тэгшитгэлийн бүх боломжтой сөрөг биш $y=\{x_j\}$ ший дийг $Y=\{y\}$ олонлогийг авч үзье. Үүнд P_0 нь m хэм жээст огторгуйд тодорхойлогдсон тэгтэй тэнцүү би вектор юм.

Дурын y шийдүүдийн доторх $x_j\neq 0$ хувьсагчийг …гаар, тэдгээрт харгалзах t-нүүдийг $\hat{t}_j$-гаар тус тус …мдэглэв.

$\{\hat{t}_{jy}\}$-гээр y шийдийн доторх $\bar{x}_j\neq 0$-д харгалзах …нүүдийн системийг тэмдэглэе.

$\{\hat{t}_{jy}\}$ тоонуудын дотроос хамгийн ихийг нь t_y-ээр …мдэглэе.

Тийнхүү

$$t_y=\max_j\{\hat{t}_{jy}\}$$

…айх ажээ.

Одоо бүх боломжтой $Уэу$ шийдүүдийн дотроос …харгалзах t_y-гийн зохистой утга $t_{y_{зох}}$ нь

$$t_{y_{зох}}=\min_{Уэу}[\max_j\{t_{jy}\}]$$

…үюу

$$t_{y_{зох}}=\min_{Уэу}(t_y)$$

…нөхцөлд тохирох y-ийн зохистой утга $y_{зох}$-ыг олъё.

Энэ нөхцөлд тохирох y шийдийг (хэрэв ийм шийд …лдох байвал) зохистой шийд гэж нэрлэх ба $y_{зох}$ гэж …мдэглэе. Ийм бодлогыг минимаксын бодлого гэнэ.

(Энэ бодлогын тухайн тохиолдол нь дараа IV бү…лэгт тодорхой үзэх ачаа тээвэрлэлтийн зөвхөн цаг ху…гацаагаар бодогдох бодлого болно.)

$\sum_{j=1}^{n}x_jP_j=P_0$ вектор тэгшитгэлд харгалзах

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ 1\leqslant l\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n$$

…гэсэн n хувьсагч бүхий m шугаман тэгшитгэлийн сис…темийг төгсгөлтэй тооны адилтгал хувиргалтаар хувир…гасны дунд зохистой шийд гарган авч болно.

Үүний тулд:

1. Өгөгдсөн системийн сөрөг биш нэгэн шийдийг …олно.

2. Үндсэн x_i хувьсагчдын дотроос t_i-гийн t_i^{max}-тай …тэнцүү холбогдолд харгалзах хувьсагчийг олох

5 132

3. Үндсэн биш хувьсагчдын дотроос $t_j \geqslant t_i^{max}$ —
харгалзах x_j хувьсагчдыг хаях.

4. i дугаар мөрөн дэх Σ тэмдгийн дотроос $a_{ij}{}^*$ э
рэг коэффициентийг олж, $a_i{}^*$ шийдвэрлэгч элементий
тодорхойлон адилтгэл хувиргалтыг үйлдэх.

5. (Хэрэв хэрэгцээтэй бол) энэ 4 дүгээр алхмы
хэд дахин давтах замаар x_i хувьсагчийг үндсэн хувь
сагчийн бүрэлдэхүүнээс гаргаж, түүнийг цаашид а
хаарлын гадна орхиж болно.

6. 2—5 хүртэлх алхмуудыг хувирсан системий
хувиргалтын тодорхой алхамд тохирох мөрийн бү
коэффициентүүд эерэг биш болох хүртэл давтан х
рэглэж болно.

Энэ алхам дээр олдсон үндсэн шийд нь зохисто
шийд байна.

Учрыг тайлбарлая. Тодорхой тооны адилтгал ху
виргалтын дараа өгөгдсөн систем

$$x_{i1} = a_{i1} - (\sum_j a_{i1j} x_j),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{ik} = b_{ik} - (\sum_j a_{ikj} x_j); \quad a_{ikj} \leqslant 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{i_p} = b_{i_p} - (\sum_j a_{i_p j} x_j).$$

дүрстэй болох ба x_{ik} хувьсагчид t_i^{max} харгалзах юм гэж
саная. Хэрэв $b_{ik} < 0$ байвал x_{ik}-г анхааралдаа аваха
байж нийцгүй систем гарган авна. (Хэрэв $b_{ik} = 0$ бай
вал 56 дугаар хуудсан дахь II тайлбар ёсоор $x_{ik} =$
гэж үзэх ба $a_{ikj} \geqslant 0$ байх бүх j-гийн хувьд $x_j =$
гэж бас үзэх ёстой.

Үүний дараагаар адилтгал хувиргалтаа цаашид ү
гэлжлүүлнэ).

III БҮЛЭГ

АЧАА ТЭЭВЭРЛЭЛТИЙН БОДЛОГЫГ ЗӨВХӨН ӨРТӨГТЭЙ НЬ ХОЛБОЖ БОДОХ

Энэ бүлэгт шугаман программчлалын ердийн бодлогын нэгэн болох ачаа тээвэрлэлтийн бодлогыг авч үзнэ. Ачаа тээвэрлэх асуудлыг төлөвлөх үед энэхүү тээвэрлэлтийг хамгийн ашиг орлоготой гүйцэтгэж чадахаар зохион байгуулах шаардлага гардаг. Зарим үед ачаа тээвэрлэлтийг хамгийн бага өртөгтэйгөөр тээвэрлэх төлөвлөгөө зохиох, зарим үед цаг хожих явдлыг гол болгож тээвэрлэлтийн бүх боломжтой төлөвлөгөөнүүдийн дотроос, уул ачааг хэрэглэх газарт нь хамгийн богино хугацаанд хүргэж чадах тийм төлөвлөгөөг сонгож авах шаардлага бас гардаг.

Эхний бодлогыг ачаа тээвэрлэлтийн зөвхөн өртөгийн хувьд бодогдох бодлого, сүүлчийн бодлогыг зөвхөн цаг хугацааны хувьд бодогдох бодлого гэж тус тус нэрлэдэг.

Өртгийн хувьд бодогдох бодлого нь шугаман программчлалын бодлогын тухайн тохиолдол бөгөөд өмнөх бүлэгт үзсэн симплекс аргаар шийдвэрлэгдэж болно. Гэвч уул бодлогын онцлогоос шалтгаалж түүнийг хослолын арга гэж нэрлэгддэг аргаар бодвол хялбар байдаг. Хэрэв ачаа явуулах ба хүлээн авах газруудын тоо цөөн байвал энэ бодлогыг гар аргаар бодож болох ба харин явуулах ба хүлээн авах газруудын тоо олон байх үед тооцон бодох электрон машинаар бодохоос өөр замгүй.

Жишээ нь ачаа явуулах газрын тоо 30, хүлээн ава газрын тоо 40 байх үед дурдсан бодлогыг «Стрела машин 25—30 минутанд бодсон байна.

III бүлэгт ачаа тээвэрлэлтийн зөвхөн өртгийн хувь бодогдох бодлогыг бодох хослолын аргыг үзэх ба эн бодлогыг тооцон бодох машин дээр бодох хялбарчил сан дамжлага загварыг харуулна.

11 §. Асуудлыг тавих нь

Ачаа тээвэрлэлтийн зөвхөн өртгийн хувьд бодог дох бодлогыг дараах маягаар томьёолж болно.

m ширхэг газраас ачаа явуулах ба n ширхэг газа хүлээн авах юм гэж саная. $a_1, a_2, \dots, a_m$-ээр ачаа яву лах газар тус бүрд байгаа нэгэн төрлийн ачааны то хэмжээг, $b_1, b_2, \dots b_n$ -ээр хүлээн авах газар тус бүр шаардагдах ачааны тоо хэмжээг тус тус тэмдэглэе.

x_{ij}-гээр төлөвлөгөө ёсоор ачаа явуулах i дугаа газраас хүлээн авах j дугаар газарт хүргэх нэгж ача ны тоо хэмжээг c_{ij}-гээр энэхүү нэгж ачааны өртгий тэмдэглэё.

$i \backslash j$	b_1	b_2		b_j		b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1j} x_{1j}		c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2j} x_{2j}		c_{2n} x_{2n}
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}		c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mj} x_{mj}		c_{mn} x_{mn}

Хоёрдугаар хүснэгт

Явуулах бүх m ширхэг газраас явуулсан ачааны то хэмжээ, хүлээн авах бүх n газруудад хэрэгцээтэй ачаа ны тоо хэмжээтэй тэнцүү юм гэж үзвэл

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{26}$$

нөхцөл биелэгдэх ёстой. Иймэ хэлбэрийн бодлогыг дугаар хүснэгт дүрстэйгээр бичиж байя.

Сөрөг биш $x_{ij} \geqslant 0$ элементтэй

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2 \dots, m), \tag{26'}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \tag{26''}$$

нөхцөлд тохирох $m \times n$ эрэмбийн $x = (x_{ij})$ матрицийг ачаа тээвэрлэлтийн бодлогын шийд гэж нэрлэе. (26′) нөхцөл нь ачаа явуулах i дугаар газрын бүх ачаа ачигдсан болохыг үзүүлж байгаа ба (26″) нөхцөл нь хүлээн авах j дугаар газрын хэрэгцээ бүрэн хангагдсан гэдгийг харуулж байгаа юм. Бидний зорилго ачаа тээвэрлэлтийн нийт өртөг

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

хамгийн бага байх x_{ij}-гийн сөрөг биш утгуудыг тодорхойлоход оршино.

Матрицийн скаляр үржвэрийн тодорхойлолтыг ашиглаж, ачаа тээвэрлэлтийн зөвхөн өртгийнхөө хувьд бодогдох бодлогыг бас өөрөөр томьёолж болно.

Сөрөг биш бодит C_{ij} элементтэй $C = (C_{ij})$ матриц өгөгджээ. Матриц дүрстэй бичигдсэн бөгөөд (26′) ба (26″) нөхцөлүүдэд тохирох X шийдүүдийн дотроос (CX) скаляр үржвэр хамгийн бага утгатай байх шийдийг олохыг шаардана. Энэ нөхцөлд тохирсон X матрицаар тодорхийлэгдэх шийдийг зохистой шийд гэж нэрлэе.

12 §. Ачаа тээвэрлэлтийн зөвхөн өртгөөр бодогдох бодлогын үндсэн шийд

Өгөгдсөн $C = (C_{ij})$ матриц, мөн дурын $X = (x_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, m$) ($j = 1, 2, \dots, n$) шийд-матрицийг авч үзье. Тэгэхдээ $m \leqslant n$ гэж бодъё. Хэрэв иймэ биш байвал матрицийн мөр баганyудын байрыг сольж болно.

Хэд хэдэн тодорхойлолттой танилцъя.

i, j хос натурал тоог *дөрвөлжин* дөрвөлжнүүдийн дурын олонлогийг *хуримтлал* гэж, тус тус нэрлэе. $i_1 j_1$ $i_1 j_2$, $i_2 j_2$, $i_2 j_3 \dots$ дүрстэй дөрвөлжнүүдийн дарааллыг хэлхээ гэе.

$$i_1 j_1,\ i_1 j_2,\ i_2\ j_2,\ \dots,\ i_t j_t,\ i_t j_1$$

дүрстэй хэлхээг *битүү хэлхээ* буюу *цикл* гэнэ. Наа
зах нь нэг цикл агуулсан хуримтлалыг циклт хурим
лал гэх ба нэг ч циклгүй хуримтлалыг циклгүй хурим
лал гэнэ.

ij дөрвөлжин бүрд X шийд матрицийн зөвхөн ган
x_{ij} элемент мөн өртгийн C матрицийн зөвхөн ганц c
элемент тус тус харгалзана. Ийм учраас дөрвөлжни
хуримтлал бүрийг түүнд харгалзах x_{ij} мөн c_{ij} хоёры
аль алиных нь хуримтлал гэж үзэж болно.

Битүү θ хэлхээний элементүүдийг цагийн зүүни
хөдлөлийн дагуу чигээр дугаарлаж сондгой дугаарта
элементүүдийг хагас сондгой хэлхээ θ^c, тэгш дугаа
тай элементүүдийг хагас тэгш θ^m хэлхээ үүсгэж ба
на гэж ярилцаж байхаар тогтъё.

Хагас сондгой хэлхээний C_{ij} элементүүдийн нийл
бэрийг $\sum_{\theta^c} C_{ij}$ гэж, хагас тэгш хэлхээний C_{ij} элементү
дийн нийлбэрийг $\sum_{\theta^m} C_{ij}$ гэж тус тус тэмдэглэе.

Теорем. *Тэгээс ялгаатай* x_{ij} элементүүдээс тог
сон циклт хуримтлал бүхий ямарч X шийдийн хувь
$(CУ) \leqslant (CX)$ байх $У_{ij}$ элементүүдээс тогтсон цик
гүй хуримтлал бүхий $У$ шийд олдоно. Тэгэхдээ $У$ ши
дийн тэгтэй тэнцүү биш элементийн тоо X шийди
тэгтэй тэнцүү биш элементүүдийн тооноос цөөн байн

Баталгаа. X матрицийн тэгтэй тэнцүү биш x
элементүүд θ_1 битүү хэлхээ үүсгэнэ гэж үзээд $\sum_{\theta_1^m} c$
$\sum_{\theta_1^c} c_{ij}$ хоёр нийлбэрийг жишиж үзье. Энэ хоёрын нэг
жишээлбэл $\sum_{\theta_1^m} C_{ij}$ нь $\sum_{\theta_1^m} C_{ij} \leqslant \sum_{\theta_1^c} C_{ij}$ байх ёстой
θ_1 хэлхээн дэх элементүүдийг

$$x'_{i_1j_1} = x_{i_1j_1} + x_{ij}^{min}, \; \ldots, \; x'_{i_tj_t} = x_{i_tj_t} + x_{ij}^{min},$$
$$x'_{i_1j_2} = x_{i_1j_2} - x_{ij}^{min}, \; \ldots, \; x'_{i_tj_1} = x_{i_tj_1} - x_{ij}^{min}.$$

дүрмээр хувиргах замаар $X = (x_{ij})$ матрицаас X'
$= (x^1{}_{ij})$ матриц үүсгэе. Үүнд; $i_1j_1, i_2j_2, \ldots i_tj_t$ нь х

гас сондгой θ^c хэлхээний дөрвөлжнүүд, $i_1j_2, i_2j_3, \ldots,$
i_tj_1 хагас тэгш θ^m хэлхээний дөрвөлжнүүд бөгөөд
x_{ij}^{min} нь хагас сондгой θ^c хэлхээний хамгийн бага эле-
мент болой. Харин бусад ij дөрвөлжнүүдийн хувьд
$X^1{}_{ij} = x_{ij}$ юм, гэж үзье.

x_{ij} элементийг θ хэлхээгээр шилжүүлэх замаар X
матрицаас үүссэн X^1 матриц нь ачаа тээвэрлэлтийн
бодлогын шийд бас болж чадна гэдгийг хялбархан
ажиж болно. Тэгээс ялгаатай бүх x_{ij} элементүүдийн
тоо X' матрицад наад зах нь нэгээр хорогдож ирнэ

$$(CX') = (CX) + \left(\sum_{\Theta ч} c_{ij} - \sum_{\Theta н} c_{ij}\right) x_{ij}^{min}, \quad \text{байх тул}$$
$$(CX') \leqslant (CX) \text{ байна.}$$

Ийм шийдүүдийг олох ажлыг цаашид үргэлжлүүлбэл
төгсгөлтэй тооны алхмын дараа тэгээс ялгаатай x_{ij}
элементүүдийн дотор битүү θ хэлхээ байхгүй тийм
$У$ шийдэд хүрэх ба $(CУ) \leqslant (CX)$ болж теорем батлаг-
дана.

*Мөрдлөг. Ядаж нэг зохистой шийд олохын
тулд сөрөг биш x_{ij} элементүүдээс тогтсон цикл-
гүй хуримтлал бүхий бүх боломжтой X шийдийг
авч үзвэл хүрэлцээтэй юм.*

Тэгээс ялгаатай x_{ij} элементүүд нь циклгүй хуримт-
лал үүсгэх матриц дүрстэй илэрхийлэгдэх X шийд
бүхнийг *үндсэн шийд* гэнэ.

Ерөнхийдөө, шийдийг дүрсэлж байгаа X матрицийн
тэгээс ялгаатай элементүүдийн тоо янз бүр байж бо-
лох боловч ямар ч X шийдийн дотор n-ээс цөөнгүй
тооны тэгээс ялгаатай элемент байх нь 11 §-ийн (26″)
нөхцөлөөс бас харагдаж байна. Нөгөө талаас дараах
теорем бас хүчин төгөлдөр байдаг.

Теорем. *Дурын үндсэн шийд дэх тэгтэй тэн-
цүү биш x_{ij} элементүүдийн тоо N нь $n \leqslant N \leqslant$
$\leqslant n + m - 1$ тэнцэтгэл бишийг хангана. Үүнд m нь
ачаа явуулах газрын тоо, n нь ачаа хүлээн авах
газрын тоо болно.*

Баталгаа. Эхлээд хоёр леммтэй танилцъя. $(m+n)$
хэмжээст огторгуйд $m \times n$ ширхэг вектор байгуулж,
тэдгээрийг $C = (c_{ij})$ матрицийн ij дөрвөлжнүүдийн

олонлогт харилцан нэгэн утгатайгаар харгалзуулъ
ij дөрвөлжинд i ба $m+j$ дугаар байгуулагч нь нэ
тэй тэнцүү, бусад нь тэгтэй тийм $\mathbf{P}_{ij}$ векторыг ха
галзуулъя. Тэгвэл дөрвөлжнүүдийн хуримтлал бүр
векторуудийн ямар нэг дэд олонлог тохирох ба мө
урвуугаар векторуудийн ямар нэг дэд олонлогт дө
вөлжнүүдийн ямар нэг хуримтлал харгалзах нь и
байна.

1 дүгээр лемм. Хэрэв $\{\mathbf{P}_{ij}\}$ векторуудийн оло лог шугаман хамааралтай байвал харгалзо дөрвөлжнүүдийн хуримтлал циклтэй байна.

$\{\mathbf{P}_{ij}\}$ векторуудийн олонлогийг шугаман хамааралт юм гэж бодвол ядаж нэг коэффициент нь тэгээс я гаатай бөгөөд q (о,о, . . . , о) тэг векторт хүргэх ш гаман эвлүүлэг олдох ёстой. Энэ эвлүүлэгт орс тэгээс ялгаатай коэффициентууд бүхий векторууди авч үзье. Ийм вектор нь жишээлбэл $\mathbf{P}_{ij_1}$ болог. Н гэнт q векторийн бүх байгуулагчид тэгтэй тэнцүү б лохоор түүний шугаман эвлүүлэгт орсон $\mathbf{P}_{ij_1}$ вектори i_1 дүгээр байгуулагчийг тэг болгож хувиргахын ту наад зах нь яг ийм, тэгтэй тэнцүү биш байгуулагчт нэг вектор шаардагдана. Иймд энэхүү шугаман эвлү лэгт i_1 тэмдэгтэй жишээ нь $\mathbf{P}_{ij_2}$ вектор заавал орс байж таарна. Одоо нэгэнт i_2 байгуулагчтай вект шугаман эвлүүлэгт орсон болохоор мөн шалтгаана $\mathbf{P}_{i_2j_2}$ гэсэн, ядаж нэг вектор уул эвлүүлэгт орно. И маягаар сэтгэсний дүнд $\mathbf{P}_{i_1j_1}$, $\mathbf{P}_{i_1j_2}$, $\mathbf{P}_{i_2j_2}$, $\mathbf{P}_{i_2j_3}$,... ве торуудийн дараалллыг гарган авна.

Бидний мэдэлд төгсгөлтэй тооны вектор байг болохоор ямар нэг төгсгөлтэй тооны алхмын дар $\mathbf{P}_{i_tj_t}$ векторт хүрэх ба энэ вектороэс $\mathbf{P}_{i_tj_1}$ векто шилжинэ. Векторуудийн энэ дараалалд дөрвөл нүүдийн

$$i_1j_1,\ i_1j_2,\ i_2j_2,\ i_2j_3, \ldots,\ i_tj_t,\ i_tj_1,$$

гэсэн циклт хуримтлал харгалзана.

2 дугаар лемм. $m+n$ дөрвөлжнөөс тогтсон х римтлал бүр циклтэй байна.

Энэ леммийг нотлохын тулд бидний байгуул векторуудийн дотроос дурын $(m+n)$ ширхэг вект рууд шугаман хамааралтай байна гэдгийг үзүүлб хангалттай юм.

Үүнийг нотолъё.

$$\mathbf{Q}(\underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{m \text{ ширхэг}};\ \underbrace{+1, +1, \ldots, +1}_{n \text{ ширхэг}}).$$

гэсэн $(n+m)$ хэмжээст вектор авъя. Энэ вектор бүх $\mathbf{P}_{ij}$ вектортэй тоонолжин байна. Иймд бүх $\mathbf{P}_{ij}$ векторууд $m+n-1$ хэмжээст огторгуйд харьяалагдана. Ийм учраас тэдгээрийн аль ч $m+n$ ширхэг вектортэй шугаман хамааралтай байна. 11 § дахь (26″) нөхцөл ба сүүлчийн лемм ёсоор $n < N < m+n$ байх болно. Харин $N=n$ мөн $N=m+n-1$ байх бодлого байдгийг жишээгээр шууд үзүүлж болдог тул N тоо үнэхээр $n \leqslant N \leqslant m+n$-1 нөхцөлд тохирох болно. Теорем бүрэн нотлогдов.

$m+n-1$ дөрвөлжнөөс тогтсон циклгүй хуримтлалд харгалзах $\{\mathbf{P}_{ij}\}$ векторуудийн олонлог бидний байгуулсан $\mathbf{P}_{ij}$-векторууд $(m+n)$ хэмжэст огторгуйд суурь үүсгэж чадах нь өмнө нотолсон леммээс илт байна. $m+n-1$ дөрвөлжнөөс тогтсон дурын циклгүй хуримтлалыг H-аар тэмдэглэе.

$(m+n)$ хэмжээст огторгуйн бүх боломжтой сууриуд, $(m+n-1)$ дөрвөлжнөөс тогтсон циклгүй хуримтлалын хоорондох харилцан нэгэн утгатай тохиролцоог ашиглаж, олон хэмжээст огторгуйн суурийн чанарыг $m+n$-1 дөрвөлжнөөс тогтсон циклгүй хуримтлалд шилжүүлэн дараах маягаар томьёолж болно.

1 дүгээр чанар. $m+n-1$ дөрвөлжнөөс тогтсон циклгүй хуримтлал нь H_1 бөгөөд $(ij) \in H^*_1$ гэж санавал (ij-г хуримтлалд нэгтгэсний дүнд үүсэх H_2 хуримтлал нь зөвхөн ганц θ циклтэй байна.

2 дугаар чанар. $(i',j') \neq (i,j)$ ба $(i',j') \in \theta$ байвал H_2 хуримтлалаас (i', j') дөрвөлжнийг зайлуулахад үүсэх H_3 хуримтлал $m+n-1$ дөрвөлжнөөс тогтсон циклгүй хуримтлал байна.

1 ба 2 дугаар чанаруудад яригдсан H_1, H_3 хуримтлалууд нь нэг нь нөгөөгөөсөө ганцхан дөрвөлжнөөр ялгаатай.

Тодорхойлолт. *Бие биеэсээ ганцхан дөрвөлжнөөр ялгагдах хоёр циклгүй $m+n-1$ хуримтлалыг нэгэн солилтоор үүсэх циклгүй $m+n-1$ хуримтлал гэнэ.*

---

[*] $\in$ тэмдэг нь ij дөрвөлжин H_1 хуримтлалд үл харьяалагдана гэдгийг тэмдэглэнэ,

Дурын үндсэн $X=(x_{ij})$ шийдийг авч үзвэл 71 д гээр хуудсан дахь теорем ёсоор тэгээс ялгаатай элементүүдийн тоо N нь $n \leqslant N \leqslant n+m-1$ нөхцө тохирох ба шийдийн бусад $mxn-N$ элементүүд тэгтэй тэнцүү байна.

X шийдийн тэгтэй тэнцүү биш x_{ij} элементүүди агуулсан дөрвөлжнүүд бүхий циклгүй $m+n-1$ х римтлал H-ийг байгуулъя.

Тодорхойлолт. X шийдийн циклгүй $m+n-1$ хуримтлалын дөрвөлжнүүдэд орших тэгтэй тэнц элементүүдийг сонгож авсан тэгүүд гэж нэрлэнэ.

Тодорхойлолт. *Циклгүй $m+n-1$ H хурим лалыг үүсгэж буй X үндсэн шийдийн тэгтэй т цүү биш x_{ij} элементүүдийг, сонгон авсан тэгүү тэй хамтатган сонголт гэж нэрлэе.*

Тодорхойлолт. *X сонголтын элементүүд харгалзах C матрицийн c_{ij} элементүүдийг x-э сонгогдсон элементүүд гэнэ.*

Иймд, сонголт нь тэгтэй тэнцүү биш $x \neq o$ элем түүдийн олонлогийг циклгүй $m+n-1$ H хуримтл үүсгэх хүртэл гүйцээж байгаа $x_{ij}=o$ элементүүди ялгаж чадсан тийм үндсэн шийд юм. Хамгийн эц ядаж нэг зохистой шийд олохын тулд бүх боломжт сонголтуудыг авч үзвэл хүрэлцээтэй юм гэдэг д нэлтэнд хүрч байна.

13 §. Зохистой сонголт

Ямар нэг анхны сонголтоос эхэлж, $(C\ X)$ скал уржвэр арай бага утгатай байх өөр нэг сонголто дэс дараалан шилжих замаар төгсгөлтэй тооны алх хийсний дараа зохистой шийдэд хүрдэгт зохис шийд олох аргын мөн чанар оршино. Иймд анхны с голтыг хэрхэн байгуулах тухай асуудал гарах нь з

Анхны сонголт байгуулах дор дурдсан аргатай нилцъя.

Эхлээд $X=(x_{ij})$ матрицийн эхний мөрийн элем түүдийг тодорхойлъё. Үүний тулд $C=(c_{ij})$ матриц анхны мөрийн хамгийн бага элементийг хайж олох энэ нь c_{ij_1} бологө. Тэгээд $x_{1j_1}=\min(a_1;\ в_{j_1})$ гэж на. Хэрэв $a_1 > в_{j_1}$ байвал C матрицийн мөн тэр рөөс $c_{1j_2} \geqslant c_{1j_1}$ нөхцөлд тохирсон хамгийн бага элементийг хайж олох ба $x_{1j_2}=\min(a_1-x_{1j_1};\ в_{j_2})$

авна. Энэ алхмыг нэгдүгээр $a_1=\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$ тэгшитгэлийг бүрэн хангах хүртэл үргэлжлүүлнэ. Хэрэв энэ процессийн ямар нэг алхам дээр a_1-ийн үлдэгдэл, харгалзах $в_{j_k}$-тайгаа яг тэнцүү байвал x_{1j_k}-г энэ үлдэгдэлтэй тэнцүүлж $(x_{1j_k}=в_{j_k})$ дараагийн $x_{1j_{k+1}}$ хувьсагчийн утгыг тэгтэй тэнцүү гэж үзнэ. Үүний дараагаар хоёр, гурав гэх мэтчилэн цаашдын мөрүүдэд шилжин орох жишээтэйгээр ажиллана. Харгалзах тэгшитгэлээ бүрэн хангасан баганууддад тэг бичихгүй.

Байгуулалтаас үзэл бидний гарган авсан анхны шийд нь сонголт мөн юм. Учир нь сонгогдсон элементийн тоо $m+n-1$-тэй тэнцүү бөгөөд тэдгээрийн дотор ганц ч битүү хэлхээ алга байна.

a_i \ b_j		5 (1)	10 (2)	20 (3)	15 (4)
10	1	8	3	5	2 / 10
15	2	4 / 5	1 / 10	6 / 0	7
25	3	7	9	4 / 20	3 / 5

3 дугаар хүснэгт

Дээр өгүүлсэн бүх зүйлийг тодруулахын тулд жишээ авч үзье. 3 дугаар хүснэгтээр илэрхийлэгдсэн матрицаар тодорхойлогдох ачаа тээвэрлэлтийн бодлогын анхны шийдийг байгуулах зорилго тавья.

Нэгдүгээр мөрөнд (8,3,5,2) тоонуудын хамгийн бага нь 2 байгаа тул $x_{14}=\min(10,15)=10$ гэж авна. Нэгэнт ачаа явуулах нэгдүгээр газрын бүх ачаа дууссан тул хоёрдугаарт явуулах газрын ачааг хуваарилах ажилд оръё. Үүний тулд 3 дугаар хүснэгтийн хоёрдугаар мөрөн дэх (4,1,6,7) тоонуудын хамгийн багыг олох бө энэ нь 1 юм. Иймд $x_{22}=\min(15,10)=10$ байх ажээ. Явуулах хоёрдугаар газарт $15-10=5$ нэгж хэмжээний үлдэгдэл ачаа байгаа тул хоёрдугаар мөрнөөс хоёр дахь хамгийн бага элементийг хайж олно. Энэ нь 4 байна. Тэгэхэл $x_{21}=\min(15-10,5)=5$ байх ёстой. Хүлээн авах нэгдүгээр газрын шаардлага бүрэн хангагдсан, мөн явуулах хоёрдугаар газарт ачаа үлдээгүй байдлыг харгалзан хоёрдугаар мөрөн дэх гурав дахь хамгийн бага элемент нь олбол 6-тай тэнцүү байна. Иймд $x_{23}=0$ гэж үзье. Одоо явуулах гуравдугаар газрын ачааг хуваарилъя. Энэ зорилгоор гуравдугаар мөрний (1, 9, 4, 3) тоонуудын хамгийн багыг олъё. Хүлээн авах нэгдүгээр газрын хэрэгцээ бүрэн хангагдсан учраас гуравду-

гаар мөр нэгдүгээр баганын огтлолцол дээр орших 1-
анхааралдаа авахгүй байж болно. Ийм учраас (9.4
тоонуудын хамгийн бага нь болох 3-ыг олж $x_{34} =$
$(25,15-10) = 5$ гэж авна. Үүний дараа гуравдугаар
рөн дэх дараачийн бага тоо болох 4-ийг олж $x_{33} =$
гэж бодно.

Ийнхүү гаргаж авсан хуваарилалт шийд мөн бол
нь илт байна. Түүнээс гадна энэ шийд нь бас сонго
болж чадна. Учир нь сонгон авсан элементийн т
$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ байгаа бөгөөд эдгээр нь ө
хоорондоо цикл үүсгээгүй байна.

Нөгөө талаас сонголтонд ороогүй x_{ij} элемент б
сонголтын элементүүдтэй нийлж зөвхөн ганц ци
үүсгэх нь илт байна.

Бид, анхны шийдийг олох дурдсан аргыг цааш
баримтлах болно.

Одоо H_1 хуримтлалтай анхны сонголт X_1 ши
олдсон бөгөөд харгалзах скаляр үржвэр $(C\ X_1)$
C_1-тэй тэнцүү юм гэж санаад H_1-д ороогүй C_{ij} элеме
бүрийг

$$\Delta_{ij} = \sum_{\theta c} (c_{ij}) - \sum_{\theta т} (c_{ij})$$

илэрхийллийн тусламжтайгаар үнэлэн үзье. Үү
$\sum_{\theta c} c_{ij}$, $\sum_{\theta т} c_{ij}$ нь харгалзан c_{ij} элемент бүр x-ээр со
гогдсон элементүүдтэй нийлж үүсгэх ганцхан бит
хэлхээний сондгой ба тэгш хагасын элементүүди
нийлбэр болой. (Үнэлэн үзэж буй c_{ij} элементийг
хэлхээний анхны элемент болгон авна). Хамгийн ба
Δ_1^{min} үнэлэлтэд харгалзах c_{ij} элемент, мөн энэ э
ментийн x-ээр сонгогдсон элементүүдтэй хамтарч ү
гэсэн битүү хэлхээг анхааралдаа авъя. Хоёрдуга
сонголт x_2-ыг олох зорилгоор нэгдүгээр сонголт
хамгийн бага элемент x_{ij}^{min}-ийг тэгш хагас хэлхээнэ
сондгой уруу нь шилжүүлье. Энэ үед хэрэв тэгш х
гас хэлхээнд x_{ij}^{min}-тэй тэнцүү хэд хэдэн x_{ij} элеме
түүд байвал, уул хэлхээг цагийн зүүний хөдлөли
дагуу тойроход эхлээд дайралдах x_{ij}^{min} элементи
агуулсан дөрвөлжинг H_1 хуримтлалаас зайлуулах
маар хамгийн бага элементийг тодруулж болно.

хуримтлалаас зайлуулагдсан ij дөрвөлжний оронд c_{ij_1}
шинэ сонголтын $x_{i_1j_1} = x_{ij}^{min}$ элементүүд харгал-
зах i_1j_1 дөрвөлжнийг оруулъя. (x_{ij}^{min} элементийг хэл-
хээг дээгүүр гүйлгэсний дүнд x_2 сонголтонд хэд хэ-
дэн тэг элемент гарч болно). X_2 сонголт нь X_1 сон-
голтоос хэлхээн дэх $c_{i_1j_1}$ элементийг хувиргасан өөрч-
лөлтөөр ялгагдах болохоор хэрэв $\sum_{\theta c} (c_{i_1j_1}) - \sum_{\theta т} c_{ij} \angle 0$
тэнцэтгэл биш биелэгдэж байвал (CX_2) скаляр үрж-
вэр (XC_1) скаляр үржвэрээс $\left[\sum_{\theta c} (ci_{1j}, - \sum_{\theta т} c_{ij}) < 0\right]$
x_{ij}^{min} хэмжээгээр бага байна. x_{ij}^{min} тэгтэй тэнцүү байж
болох тул $C_1 \geqslant C_2$ байх ёстой гэсэн дүгнэлтэнд хүр-
нэ. Саяын дурдсан сонголт байгуулах аргыг давтаж,
X_2 сонголтоос эхлэн X_3 сонголтыг байгуулах жишээ-
гээр ажиллагааг цаашид үргэлжлүүлж болно. Энэ
үйлийн дүнд $X_1, X_2, .., X_k, ...$ сонголтуудын дараалал
үүсэх ба тэдгээрт харгалзах скаляр үржвэрүүдийн ут-
гын дараалал $C_1 \geqslant C_2 \geqslant \ldots \geqslant C_k \geqslant \ldots$ сонголтын
дугаар ахихад үл өсөх функц байна.

Хэрэв H_k хуримтлалд ороогүй c_{ij} элемент бүр сө-
рөг биш $\Delta \geqslant 0$ үнэлэлтэй байвал тийм H_k хуримтлал-
тай X_k сонголтыг зохистой сонголт гэнэ. H_k хуримт-
лалд ороогүй c_{ij} элемент бүхний хувьд $\sum_{\theta c} (c_{ij}) -$
$\sum_{\theta т} c_{ij} \geqslant 0$ тэнцэтгэл биш хүчин төгөлдөр байдаг
болохоор нэгэн удаагийн солилтоор X_k сонголтоос
нөгөө аль ч сонголтод шилжих шилжилт нь скаляр үрж-
вэрийн хэмжээг X_k сонголтод харгалзах скаляр үрж-
вэрийн C_k хэмжээнээс багасгаж чадахгүй[1]

Теорем. $a_i > 0$, $в_j > 0$ *үед бодит элементтэй* $C = (c_{ij})$ *матрицийн хувьд* $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *сонгол-тын дараалал төгсгөлтэй* тооны алхмын дараа зо-
хистой сонголтоор төгсөнө.

Баталгаа. I *тохиолдол.* Хэрэв сонголтоос сон-
голтод шилжиж $X_1, X_2 \ldots$ дарааллыг байгуулах үед

[1] Зохистой сонголт нь мөн зохистой шийд болж чадна гэдгийг харуулна.

аль ч алхам дээр нь $x_{ij} = 0$ гарч ирэхгүй бол хэлх
гээр шилжин явах x_{ij}^{min} элемент тэгээс ялгаатай бай
Энэ тохиолдолд скаляр үрвэрийн хэмжээ алхам тута
багасна. m, n хоёр төгсгөлтэй байх үед тус бүр ям
нэг сонголтыг нэгэн утгатай тодорхойлох H хурим
лалын тоо төгсгөлтэй байх учир сонголт хийх а
мын тоо томшгүй олон байж болохгүй.

II *тохиолдол.* Хэрэв сонголтоос сонголтод ши
жих үед x_{ij}-гийн тэг утга гарч ирвэл X_1, X_2 дараал
төгсгөлтэй болох нь хүмүүст эргэлзээ төрүүлж бо
но. Учир нь энэ үед $x_{ij}^{min} = 0$ байх ба скаляр үрж
рийн хэмжээ үл хорогдоно. Гэвч, ачаа тээвэрлэлти
анхны бодлогын зэрэгцээ $C = (c_{ij})$ матрицтай боло

$$a'_i = a_i + \varepsilon, \qquad i = 1,2, \ldots, m,$$

$$b'_j = b_j, \qquad j = 1,2, \ldots, (n-1),$$

$$b'_n = b_n + m\varepsilon,$$

байх хоёр дахь бодлогыг авч үзвэл дээрх эргэлз
арилж болно. Үүнд ε нь зохих хэмжээний бага эе
тоо юм. Энэхүү хоёр дахь бодлогыг ε бодлого г
нэрлэе. Энэ хоёр бодлогын эхний X_1 ба X_1^ε сонг
тыг олъё. Нэгэнт ε нь хүрэлцэхүйц бага тоо болох
H_1, H_1^ε хуримтлалууд давхцах ба X_1^ε сонголтонд т
элемент $x_{ij}^\varepsilon = 0$ гарч ирэхгүй. Учир нь мөр баганууд
хооронд

$$\sum_{r=i1}^{i=ip} a_i = \sum_{j=j1}^{j=jp} b_j.$$

тэнцэтгэлээр илэрхийлэгдэх хослол байгаа үед н
дүгээр бодлогын сонголтод тэгтэй тэнцүү x_{ij} элем
гарч ирдэг билээ. Иймд x_{ij}-гийн тэг утга

а) $$\sum_{i=i_1}^{i=iq} a_i + q\varepsilon = \sum_{j=j_1}^{j=jp} b_j,$$

б) $$\sum_{i=i_1}^{i=i_q} a_i + q\varepsilon = \sum_{j=j_1}^{j=j_p} b_j + b_n + m\varepsilon.$$

хоёр тохиолдолд гарч ирнэ. ε-ыг а), б) нөхцөлүүдээр
илэрхийлэгдэх тэгшитгэлийн язгууртай тэнцэхгүйгээр
сонгон авч чадвал X_1^ε сонголтонд тэг элемент гарч
ирэхгүй. Нэгэнт $C = (c_{ij})$ матриц хоёр бодлогонд ижил
болохоор хамгийн их сөрөг үнэлэлттэй c_{ij} элементүүд, мөн эдгээр элементүүд X_1 ба X_1^ε сонголтын элементүүдтэй нийлж үүсгэсэн битүү хэлхээнүүд, бас хэлхээн дээгүүр шилжүүлдэг X_{ij}^{min}, $X_{ij}^{\varepsilon\, min}$ элементүүдийн H_1, H_1^ε сонголт дахь байрлал цөм давхцана. Анхны бодлогод X_1 сонголтоос X_{2-m} шилжих шилжилт ны ε бодлого дахь X_1^ε сонголтоос X_1^ε-д шилжих шилжилт юм. ε хүрэлцэхүйц бага болохоор ийнхүү сэтгэх нь аль ч алхам дээр хүчин төгөлдөр байна. Нэгэнт ε бодлого нь скаляр үржвэр алхам бүрийд багасдаг $x_{ij} = 0$ утга байхгүй үеийн бодлого болохоор төгсгөлтэй тооны алхмын дараа ε бодлогын хувьд X_k^ε гэсэн зохистой сонголтод хүрнэ.

$C = (c_{ij})$ матрицууд мөн H_k, H_k^ε хуримтлалын хувьд давхцдаг учир x_k нь мөн зохистой сонголт болж чадна.

Ийнхүү теорем батлагдлаа.

14 §. Өртгийн матрицийг эн чацуугаар хувиргахад сонголтын дараалал хэвээрээ үлдэх тухай

Элементүүдийн үнэлэлтийг тодорхойлох ажил их хэмжээний тооцон бодох ажиллагааг шаарддаг. Сонголтын дарааллыг өөрчлөхгүйгээр, зохистой сонголт олох ажиллагааг үлэмж хэмжээгээр хялбарчилж чадах $C = (c_{ij})$ матрицийн хялбар хувиргалтыг олох нь чухал байдаг.

Энэ зорилгоор матрицийн эн чацуу хувиргалтын ухагдахуунтай танилцъя.

Тодорхойлолт. $C = (c_{ij})$ матриц, мөн $r_1, r_2, \ldots$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ гэсэн дурын тоонууд өгөгджээ. Хэрэв (d_{ij}) матриц C матрицаас

$D = (c_{ij} + r_i + s_j)$ томьёогоор гарч ирэх бол тэдгээрийг эн чацуу матрицууд гэнэ.

Теорем. *Матрицийг эн чацуугаар хувиргах сонголтын дараалал хэвээр үлдэнэ.*

Баталгаа. C матрицийг түүнтэй эн чацуу D м риц болгон хувиргая. C матрицаар X_1 сонголтыг о түүнээсээ уламжлан нэг удаагийн солилтын зама зохистой сонголт X_k, дээр нийлэх X_1, X_2, X_3 . . . раалдыг байгуулъя.

X_1 сонголтоос уламжлан D матрицаар зохистой сонголтод нийлэх X_1, X_2, X_3^1, . . . дараалал бас ба гуулъя. X_1 сонголтод ороогүй дурын хоёр C_{ij}^c элементүүдийн үнэлэлтийн $\Delta_{ij}^c - \Delta_{ij}^D$ ялгавар тэгт тэнцүү болохыг хялбархан харуулж болно.

$$\nabla_{ij}^C - \Delta_{ij}^D = [\sum_{\Theta c}(c_{ij}^C) - \sum_{\Theta т}(c_{ij}^C)] - [\sum_{\Theta c}(c_{ij}^C + r_i + s_j) -$$

$$- \sum_{\Theta т}(c_{ij}^C + r_i + s_j)] = [\sum_{\Theta c}(c_{ij}^C) - \sum_{\Theta т}(c_{ij}^C)] - [\sum_{\Theta c}(c_{ij}) - \sum_{\Theta т}(c_{ij}^C)] -$$

$$- \sum_{\Theta c}(r_i + s_j) + \sum_{\Theta т}(r_i + s_j) = 0.$$

Сүүлчийн хоёр нийлбэр хэмжээгээрээ адил боловч рэг тэмдэгтэй байна. Учир нь сондгой хагас хэлхэ орсон бүх r_i (эсвэл s_j) тоонууд бас тэгш хагас хээнд орно. Нэгэнт C ба D матрицын элементүүд үнэлэлт ижилхэн болохоор хамгийн бага үнэлэлт элементүүд нь бас ижил байх ёстой. Иим учраас C D матрицын аль алины хувьд X_1 сонголтоос дараа сонголтод шилжихэд ижилхэн X_2 ба X'_2 сонголт нэ. Ийм маягаар сэтгэх явдал аль ч алхмын хувьд чин төгөлдөр байна.

Энэ нь X_1, X_2, . . ., X_k сонголтын дараалал рицийг эн чацуугаар хувиргах үед үл өөрчлөгд гэдгийг гэрчилж байна. Теорем батлагдлаа.

C матрицийг нэг биш удаа эн чацуу хувирга дээрх баталгаа хүчин төгөлдөр байх нь илт байна.

Ямар ч хувиргалтын элементүүд өөр хоорон битүү хэлхээ үүсгэхгүй учир X-ээр сонгогдсон ментүүдийг тэг болгон хувиргах эн чацуу хувир тыг алхам бүр дээр хийж болох юм. Үүний тулд шээ нь, багана (мөр) тус бүрийн элемент дээр (багана) дээр нэмсэн тоо X-ээр сонгогдсон бөгөөд болгон хувиргавал зохих элемент хоёрын алге нийлбэрт эсрэг тэмдэгтэй тоонуудыг нэмбэл хан тай юм.

X-ээр сонгогдсон тэг элементүүд агуулсан матрийн x-ээр сонгогдоогүй элементийнх нь үнэлэлт, тэрүү элементтэйгээ тэнцүү байдаг. Ийм учраас элементүүдийн үнэлэлтийг тодорхойлох нүсэр их ажиллагаа үл шаардагдана. Дараачийн сонголтыг байгуулахын тулд хамгийн их сөрөг (туйлын хэмжээгээрээ) элементийг олбол хангалттай юм. Хэрэв хувирсан матриц x-ээр сонгогдсон тэг элемент агуулсан бөгөөд бүх элементүүд нь сөрөг биш байвал түүнд тохирох сонголт зохистой байна. Матрицийн дараалын инвариант чанар нь зохистой сонголт мөн зохистой шийд болж чадна гэдгийг харуулж байна. Учир нь x-ээр сонгогдсон элемент нь тэгтэй тэнцүү бөгөөд эн чацуугаар хувирсан матрицтай зохистой сонголт нь түүний скаляр үржвэр бусад шийдүүдийн скаляр үржвэрээс бага (дээд зах нь тэнцүү) байдаг чанартай болохоор бидний олсон зохистой сонголт, зохистой шийд бас болж чадах ажээ.

15 §. Зохистой шийдийг олох барил

I. Бодлогын нөхцөлийг хүснэгт дүрстэйгээр бичнэ.

II. Анхны сонголтыг тодорхойлно.

III. x-ээр сонгогдсон элементүүдийг тэг болгож хувиргана. Хэрэв энэ үед хүснэгтийн бусад элементүүд нь сөрөг биш байвал, анхны сонголт зохистой байна.

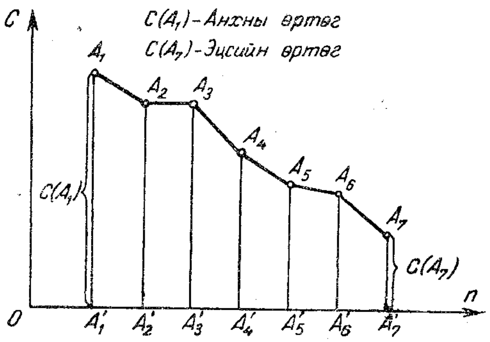
IV. Хэрэв x-ээр сонгогдсон элементүүдийг тэг болгож хувиргасны дараа хүснэгтэнд сөрөг тоо гарсан байвал (туйлын хэмжигдэхүүнээрээ) хамгийн их сөрөг тоог олно.

V. Хамгийн их сөрөг элементийг, x-ээр сонгогдсон бөгөөд тэг болж хувирсан элементүүдтэй хамтатган битүү хэлхээ үүсгэж улмаар тэгш хагас хэлхээн дэх хамгийн бага элементтэй тэнцүү x_{ij}-ийг хэлхээн дээгүүр шилжүүлж хоёрдугаар сонголтыг байгуулна.

VI. Одоо хамгийн их сөрөг элемент маань x-ээр сонгогдсон элемент болсон болохоор түүнийг тэг болгож хувиргах хэрэгтэй. Тэгэхдээ шинэ хувиргалтанд хамрах x-ээр сонгогдсон бусад элементүүдийг тэгтэй тэнцүү хэвээр байлгах хэрэгтэй.

VII. Эдгээр алхмыг, хувирсан хүснэгтийн x-ээр сонгогдсон бүх элементүүд тэгтэй тэнцүү, харин бусад элементүүд нь сөрөг биш байх тийм сонголтыг гаргах хүртэл үргэлжлүүлнэ. Энэхүү сүүлчийн сонголт нь зохистой шийд болж чадна.

VIII. Ачаа тээвэрлэлтийн зохистой шийдэд тохир
өртгийг бодож гаргахын тулд өртгийн анхны хүснэ
эцсийн шийд хоёрыг нэгэн хүснэгтэд нэгтгэн бич
хэрэгтэй. Хүснэгтийн нүдэнд байгаа тоонуудын х
үржвэрүүдийн нийлбэр тээвэрлэлтийн өртгийг тодо
хойлно.



20 дугаар зураг

Бодлогын зохистой шийдийг олох ажиллагааг т
дорхой харуулахын тулд түүнийг геометрийн арга
дүрслэн үзүүлэв (20 дугаар зураг).

Хэвтээ тэнхлэг дээр шийдийн дугаарыг босоо, тэ
лэгт тэдгээрт харгалзах өртгийн холбогдлыг тус т
тэмдэглэе. Эхлээд анхны шийдээр A_1 цэгийг гарга
авна. x-ээр сонгогдсон элементүүдийг тэг болгон х
виргаж, хэвтээ тэнхлэг дээр A_1^1 цэг гаргана. Хэр
энэ цэгт харгалзах хувирсан хүснэгтэнд сөрөг элеме
байхгүй байвал A_1 цэгт тохирсон шийд зохист
шийд байна. Хэрэв хүснэгт дурдсан чанарыг агуул
гүй байвал A_2 цэгийг олж, цааш нь тэнхлэг дэ
A_2^1 цэгийг гарган авч зохистой шийдэд хүрсэн эсэх
шалгаж үзнэ. Хэрэв зохистой шийдэд хүрээгүй б
A_3-ыг олох мэтээр цаашид ажиллана.

Төгсгөлтэй алхмын дараа зохистой шийдэд тохир
эцсийн цэгт хүрэх нь дамжиггүй. Ийм замаар гар
авсан өртгийн хугархай шугамыг 20 дугаар зураг дэ
дүрслэн үзүүлэв. Зургаас үзвэл өртгийн хэмжээ алх
бүрийд хорогдсон байна. (Ямар ч гэсэн өсөхгүй)

75 дугаар хуудсанд тодорхойлсон ачаа тээвэрлэл-
тийн бодлогоо үргэлжлүүлэн бодъё. Энэ бодлогын
анхны сонголтыг 4 дүгээр хүснэгтээр үзүүллээ. x-ээр
сонгогдсон элементүүдийг тэг болгож хувиргахын

a_i \ b_j		5	10	20	15	
		1	2	3	4	
10	1	8	3	5	(2) 10	+3
15	2	(4) 5	(1) 10	(6) 0	7	
25	3	1	9	(4) 20	(3) 5	+2
		−4	−1	−6	−5	

4 дүгээр хүснэгт

тулд өртгийн матрицийн нэгдүгээр баганын элементүү-
дээс 4-ийг, хоёрдугаар баганыхаас 1-ийг тус тус хасъя.
Үүний дүнд хоёрдугаар мөр, нэг ба хоёрдугаар бага-
натай уулзсан уулзвар дээрх x-ээр сонгогдсон эле-
ментүүд тэг болж хувирна. Хэрэв гуравдугаар баганын
элементүүдээс 6-г хасвал хоёрдугаар мөр гуравдугаар
баганын уулзвар дээрх x-ээр сонгогдсон элемент
бас тэг болно. Харин өртгийн матрицийн гуравдугаар
мөр, гуравдугаар баганын уулзвар дээрх элемент
4 − 6 = −2 утгатай байна. Өртгийн матрицийн гуравду-
гаар мөрийн элементүүд дээр 2-ыг нэмж, дөрөвдү-
гээр баганын элементүүдээс 5-ыг хасвал гуравдугаар
мөр, гурав ба дөрөвдүгээр баганyудтай огтлолцсон
огтлолцол дээрх элементүүд тэг болж хувирна.

Эцэсд нь нэгдүгээр мөр, дөрөвдүгээр баганын уулз-
вар дээрх x-ээр сонгогдсон элементийг тэг болгох
асуудал үлдлээ. Энэ зорилгоор нэгдүгээр мөрийн
элементүүд дээр 3-ыг нэмэх хэрэгтэй. Өртгийн матри
цийг ийнхүү эн чацуу хувиргалтаар хувиргасны дүнд
4 дүгээр хүснэгт 5 дугаар хүснэгт болж өөрчлөгдөнө.
5 дугаар хүснэгтэд (—1) гэсэн сөрөг элемент байгаа
учир анхны сонголт зохистой болох нь эргэлзээтэй.
Бидний үзэж буй жишээнд ганцхан сөрөг элемент бай-
гаа болохоор тэр нь (туйлын хэмжээгээрээ) хамгийн
их сөрөг элемент болно.

Энэ сөрөг элементийг x-ээр сонгогдсон элементүүд-
тэй нэгтгэн битүү хэлхээ үүсгэж 6 дугаар хүснэгтэн
дээр үзүүлсэнчлэн хоёрдугаар сонголтыг хийе. Үүний

түлд тэгш хагас хэлхээн дэх хамгийн бага нэгж ачаа
сондгой хагас хэлхээ уруу шилжүүлье.

— 1 тоо нь x-ээр сонгогдсон тоо болсон учраа
түүнийг тэг болгож хувиргах хэрэгтэй. Үүний тул
өртгийн матрицийг да
хин адилтгал хувиргал
тад оруулъя. 6 дугаа
хүснэгтийн нэгдүгээр ба
ганын элементүүд дээ
1-ийг нэмбэл x-ээр сон
гогдсон бүх элементүү
нь тэгтэй тэнцүү, ган
ч сөрөг элемент байхгү

a_i \ b_j	5 (1)	10 (2)	20 (3)	15 (4)
10 (1)	7	5	2	0 / 10
15 (2)	0 / 5	0 / 10	0 / 0	2
25 (3)	$\boxed{-1}$	10	0 / 20	0 / 5

5 дугаар хүснэгт

7 дугаар хүснэгт үүснэ.

Тийнхүү 7 дугаар хүснэгтээр тодорхойлогдох со
голт зохистой сонголт боллоо. Одоо анхны өртги
матриц, зохистой шийд хоёрыг 8 дугаар хүснэгтэнд нэгтгэе. Энэ төлөвлөгөөнд тохирсон ачаа тээвэрлэлтийн өртөг нь $C = 2\cdot 10 + 5\cdot 6 + 10\cdot 1 + 5\cdot 3 + 4\cdot 15 + 1\cdot 5 = 140$ нэгж байна.

a_i \ b_j	5 (1)	10 (2)	20 (3)	15 (4)
10 (1)	7	5	2	0 / 10
16 (2)	0	0 / 10	0 / 5	2
20 (3)	−1 / 5	10	0 / 15	0 / 5
	+1			

6 дугаар хүснэгт

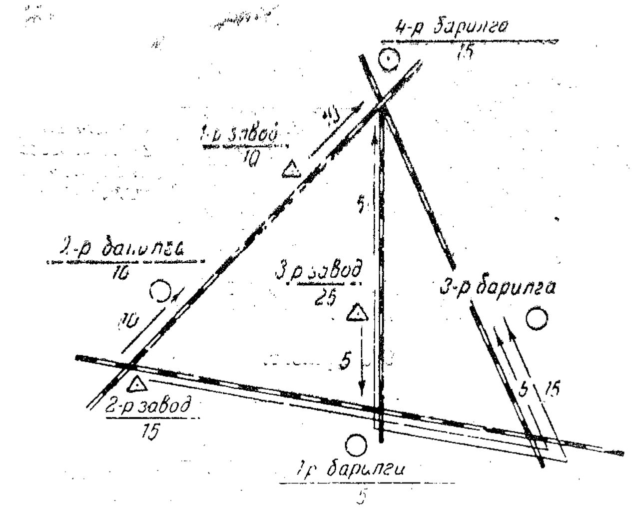
Энэтөлөвлөгөө ёсоор ачаа тээвэрлэлтийг дараах маягаар зохион байгуулж болно (21 дүгээр зура
Явуулах нэгдүгээр газрын бүх ачааг хүлээн авах д
рөвдүгээр газарт цөмийг шилжүүлж явуулах хоёрд

a_i \ b_j	5 (1)	10 (2)	20 (3)	15 (4)
10 (1)	8	5	2	0 / 10
15 (2)	1	0 / 10	0 / 5	2
25 (3)	0 / 5	10	0 / 15	0 / 5

7 дугаар хүснэгт.

a_i \ b_j	5 (1)	10 (2)	20 (3)	15 (4)
10 (1)	3	3	5	2 / 10
15 (2)	4	1 / 10	6 / 5	7
25 (3)	1 / 5	9	4 / 15	3 / 5

8 дугаар хүснэгт



21 дүгээр зураг

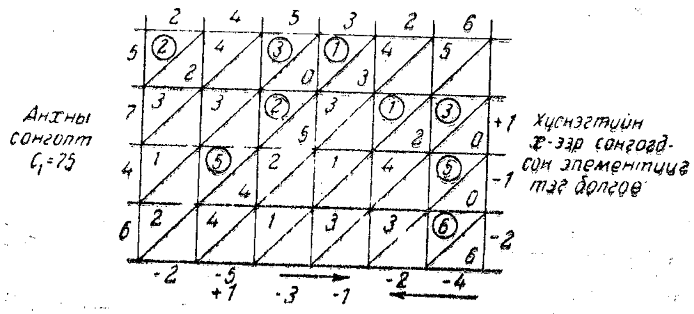
…ар газар нь хүлээн авах хоёрдугаар газрын хэрэгцээг 10 нэгж ачаагаар, гуравдугаар газрын хэрэгцээг 5 нэгж ачаагаар явуулах гуравдугаар газар нь хүлээн авах нэгдүгээр газрын хэрэгцээг 5 нэгж ачаагаар, гуравдугаарынхыг 15, дөрөвдүгээрийнхийг үлэх 5 нэгж ачаагаараа тус тус хангана. Энэ төлөвлөгөө ёсоор тээвэрлэх нь (ийм нөхцөлд тээвэрлэх бусад ямар ч тээвэрлэлтээс) хамгийн бага өртөгтэй байна.

Арай төвөгтэй жишээ авч үзье.

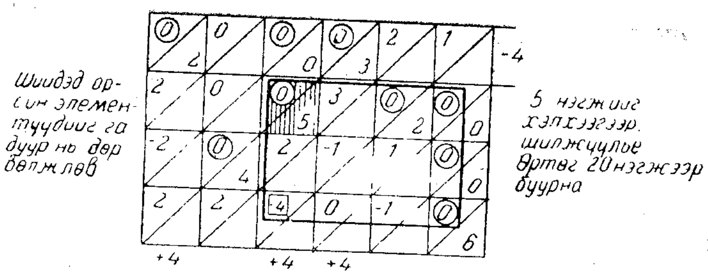
Үүнд: Явуулах дөрвөн газраас хүлээн авах зургаан газарт ачаа түгээх зохистой төлөвлөгөөг 9 дүгээр хүснэгтээр тодорхойлогдох нөхцөлд тохируулан зохио. Энэ жишээнд a_i, b_j нь мянган тонноор, C_{ij} нь мянган төгрөгөөр илэрхийлэгдэнэ.

a_i \ b_j	2	4	5	3	2	6
5	2	4	3	1	4	5
7	3	3	2	3	1	3
4	1	5	2	1	4	5
6	2	4	1	3	3	6

9 дүгээр хүснэгт



9 а хүснэгт.



9 б хүснэгт

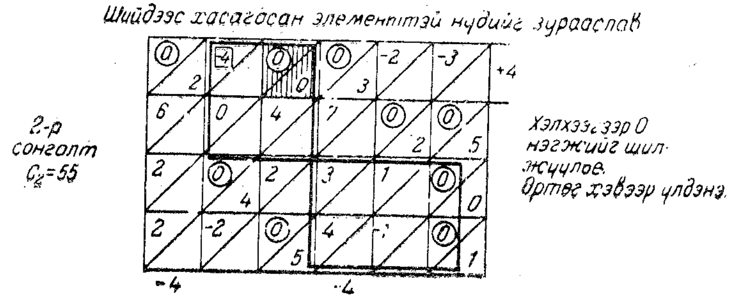
9 дүгээр хүснэгтийг дахин бичиж, нүд бүрийн до
хагаст анхны сонголтын тоонуудыг тавьж зохист
шийдийг гарган авах бүх ажиллагаар 9 а, б, в, г, д,
хүснэгтүүдээр харуулъя.

Өртгийн анхны хүснэгтийг зохистой шийдтэй нэ
гэе. (10 дугаар хүснэгт)

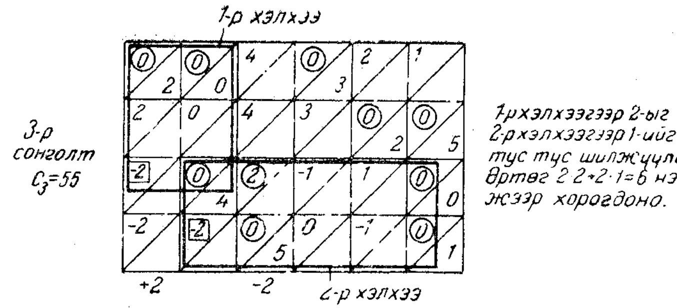
Ачаа тээвэрлэлтийг хамгийн бага зардалтайга
хэрхэн зохион байгуулбал зохихыг сүүлчийн хүснэ
харуулж байна. Зохистой төлөвлөгөө нь анхны төл
лөгөөгөөр төлөвлөсөн 75 мянган рублийг 48 мянг
рубль болгон багасгаж 27 мянган рубль хэмнэсэн бай

Зохистой төлөвлөгөөг харуулсан хүснэгт (5 дуга
хүснэгт) зөвхөн ганц зохистой шийдийг харуула
зогсоогүй, мөн тийм өртөгтэй бүх шийдүүдийг харуул
чадсан сонирхолтой баримтыг зориуд тэмдэглэе.

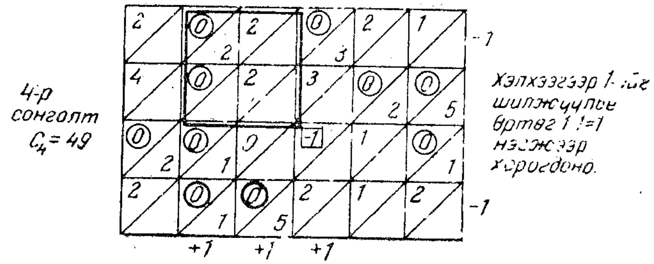
Үнэхээр ч энэ хүснэгтэнд дугуйлагдаагүй тэг эл
ментүүд байгаа бөгөөд тэднийг * (од)-оор тэмдэглэ
Ийм элемент бүр шийд элементүүдтэй битүү хэлх
үүсгэж байна.



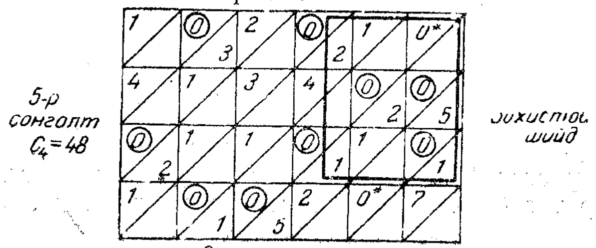
9 в хүснэгт.



9 д хүснэгт.



9 г хүснэгт.



9 е хүснэгт.

Зохих дүрмээр нэгэн удаагийн солилт үйлдэ
ижил өртөгтэй бусад шийдүүдийг гарган азч болн
Энэ нь 11 дүгээр хүснэгтээр үзүүлсэн шийдийг з

a_i \ b_j	2	4	5	3	2	6
5	2	4 3	3	1 2	4	5
7	3	3	2	3	1 2	3 5
4	1 2	5	2	1 1	4	5 1
6	2	4 1	1 5	3	3	6

10 дугаар хүснэгт.

хистой шийд болгон авах бололцоог өгч байгаа бөгөө
энэ төлөвлөгөөнд тохирсон тээвэрлэлтийн өртөг ба

$$C = 1\cdot2 + 4\cdot3 + 4\cdot1 + 1\cdot5 + 1\cdot1 + \\ + 1\cdot2 + 1\cdot2 + 5\cdot1 + 3\cdot5 = 48$$

на. Энэ үед дан тэг элементээс тогтсон битүү хэл
хээ бүрийн хувьд анхны хүснэгт дэх түүнд харгалза
битүү хэлхээний тэгш ба сондгой хагас хэлхээгээ
тодорхойлогдох өртгийн нийлбэр хоорондоо тэнцү
бөгөөд энэ нь x_j^{min}-ийг, ерөнхий өртгийг өөрчлөхгүй
гээр хэлхээн дээгүүр шилжүүлэх боломж өгнө гэдгий
хялбархан харж болно. Олонх тохиолдолд бүх зохис
той шийдийг тодорхойлох явдал ашигтай байдаг. Энэ
хүү зохистой олон шийдийн дотроос ачаа тээвэрлэл
тийг хамгийн богино хугацаанд гүйцэтгэж чадах тө
лөвлөгөөг олох дүрмийг цаашид бид үзэх болно.

Эцэст нь хамгийн их сөрөг элемент x-ээр сонгогд
сон элементүүдтэй нийлж битүү хэлхээ үүсгэх тухай
хэдэн үг өгүүлье. Хэрэв m, n хоёр цөөхөн байвал бид
ний сонирхож буй хэлхээнүүд, дээрх жишээнүүд дээ
байсан шиг шууд харагдана. Хэрэв m, n хоёр ерөнхи
дөө их байвал битүү хэлхээг дор дурдсан аргаар ол
бол хялбар байдаг. Эхлээд дугуй тэмдэгтэй ганцхан
тэг агуулсан бүх багана мөрүүдийг дарна. (Учир нь
хэлхээ үүсгэхийн тулд мөр буюу багананд наад зах
нь хоёр тэг байх ёстой). Тэгэхдээ хамгийн их сөрөг

элементийг агуулсан мөр баганыг дарж болохгүй. Ийн
хүү нэг нэг удаа багана мөрийг дарсны дараа, бас
ганцхан дугуй тэмдэгтэй тэг бүхий багана мөрийг да-
рах жишээтэй цаашид ажиллаж, энэхүү ажиллагааг
битүү хэлхээ өөрөө илрэх хүртэл үргэлжлүүлнэ.

1	0 3	2	0 1	1	0 1
4	1	3	4	0 2	0 5
0 2	1	1	0 2	1	0
1	0 1	0 5	2	0	1

11 дүгээр хүснэгт.

Том хүснэгттэй тодорхой жишээ бодох ажил их
цай эзлэх учраас битүү хэлхээ хэрхэн гаргаж авахыг
харуулсан хялбархан жишээг 12 дугаар хүснэгтээр
үзүүллээ. Эхлээд ганцхан тэг агуулсан 3, 6, 8, 10, 12,
14, 15 дугаар баганыудыг дарж дараа нь ганц, ганц
тэг агуулсан 1, 2, 6 дугаар мөрүүдийг дарна. Дараа
нь ганц тэгтэй багана буй эсэхийг ажиглавал ганцхан
4 дүгээр багана байна. Үүнийг дарсны дараа мөн тийм
мөр байна уу? гэвэл алга байна.

Үүгээр дарах ажиллагаа дууснa.

Одоо битүү хэлхээ байгуулахын тулд сөрөг эле-
ментээс эхлэн нэг тодорхой чигээр, жишээ нь цагийн
зүүний хөдлөлийн дагуу, үлдсэн тэг элементүүдийг
эмагт тэгш өнцөг үүсгэх хэлбэртэйгээр дэс дараалан
холбоно.

Бид ачаа тээвэрлэлтийн бодлогыг зөвхөн өртгийнх
нь хувьд бодох аргатай танилцахдаа явуулах бүх газ-
рын ачааны тоо хэмжээ, хүлээн авах бүх газрын хэ-
рэгцээт ачааны хэмжээтэй ижил, өөрөөр хэлбэл
$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ байх нөхцөлд танилцсан билээ.

Хэрэв $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ байвал $b_{n+1} = \sum_{i=U}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_j$
хэрэгцээтэй хүлээн авах хуурмаг газар байна гэж бо-
дож, энэ газарт хүргэх ачааны өртгийг $C_{i,\,n+1} = 0 (i = 1, 2, \ldots, m)$ гэж үзнэ.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
				Ø				Ø							Ø	1
				Ø						Ø						2
				Ø			0						-9			3
		0	Ø				0									4
		Ø				Ø			0							5
									Ø							6
	0								0			Ø				7
	0										0					8
					0						0					9
					0								0	Ø		10

12 дугаар хүснэгт.

$a_i \backslash b_j$	30	40	30
70	6 10	4 0	5 30
40	8	3 40	2
50	7	5	6
20	5 20	2	2

$\Sigma a_i = 180;\ \Sigma b_j = 100;\ b_4 = 80$

13 дугаар хүснэгт.

Жишээ. Тус бүр 70, 40, 50, 20 тонн шатахуу агуулах дөрвөн газраас хэрэгцээт гурван газарт шат хуун зөөх ажлыг хамгийн бага зардалтайгаар гүйцэ гэх төлөвлөгөөг ол. Энэ бодлогын нөхцөлийг 13 д гаар хүснэгтээр илэрхийлэгдсэн юм гэж саная. Э тохиолдолд анхны шийдийг олохдоо багануудь хувьд бодолт хийвэл зохимжтой бөгөөд олсон ши дийг 14 дүгээр хүснэгт дээр дугуйлан тэмдэглэв.

14 дүгээр хүснэгтээр тодорхойлогдсон шийд з хистой шийд мөн болохыг хялбархан шалгаж болн Энэ шийд ёсоор бол хэрэгцээт нэгдүгээр газарт яву лах ачаа нэгдүгээр газраас 10 тонн, дөрөвдүгээр га раас 20 тонн, хэрэгцээт хоёрдугаар газарт, явуул ачаа нэгдүгээр газраас 30 тонн, хоёрдугаар газра 10 тонн, хэрэгцээт гуравдугаар газарт явуулах ач

хоёрдугаар газраас 30 тонн шатахууныг тус тус түгээвэл зохих ба явуулах нэгдүгээр газарт үлдсэн 30 тонн шатахуун, гуравдугаар газрын бүх шатахууны энэ нөхцөлд ашиглах явдал зохимжгүй болой,

$a_i \backslash b_j$	30	40	30	80
70	6 10	4 30	5	0 30
40	8	3 10	2 30	0
50	7	5	6	0 50
20	5 20	2	2	0

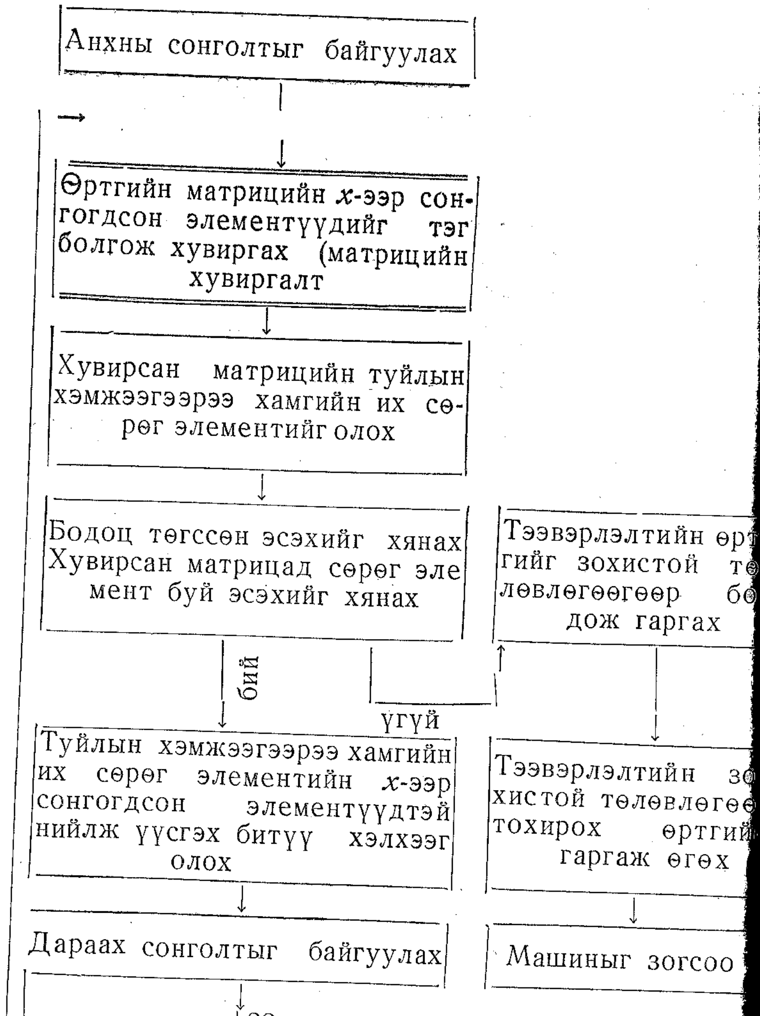
14 дүгээр хүснэгт.

Бидний, шийдийг нь олох аргатай танилцсан хоёр хэлбэрийн бодлого бол ачаа тээвэрлэлтийн зардал хэмнэлттэй холбоотой бодлогууд юм. Харин ачаа тээвэрлэлтийг хамгийн богино хугацаанд гүйцэтгэх ажлыг хэрхэн зохион байгуулах тухай бодлогыг бодох аргатай дараачийн бүлэгт танилцана.

	$a_i \backslash b_j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		18	13	21	7	18	12	11	30	15	9	20	8	11	7
1	33	18	3	15	7	6	1	12	9	4	3	17	19	3	6
2	18	15	20	17	3	4	4	3	6	11	14	2	13	6	1
3	2	4	8	11	2	7	1	4	7	3	11	17	16	2	3
4	38	9	7	3	13	13	14	11	9	4	5	19	18	3	7
5	14	7	16	15	1	7	2	4	18	13	3	1	19	20	3
6	23	11	17	14	9	7	3	8	8	7	4	5	11	13	14
7	31	9	3	1	9	2	16	19	3	7	11	14	2	4	7
8	38	12	12	11	9	3	13	14	9	7	8	7	6	3	15
9	3	7	1	4	5	8	13	20	8	6	4	19	17	1	3

15 дугаар хүснэгт.

Ачаа тээвэрлэлтийн зөвхөн өртгөөр бодогдох бодлогыг бодох арга барилыг арифметикийн ба логикийн энгэн төрлийн үйлдлүүдийн процесс гэж үзэж болно. Ийм процесс тооцон бодох электрон машин дээр хялбархан гүйцэтгэгддэг. 22 дугаар зураг дээр уул бодлогыг бодох хялбарчилсан дамжлага-загварыг үзүүлэв. Энэ дамжлага загварын дагуу «Стрела» машин дээр бодлого бодох программыг зохиодог.



22 дугаар зураг

«Стрела» машинаар $m \times n < 500$ эрэмбэтэй матри бүхий бодлого бодоход 8—10 минут, $m \times n < 1500$ эрэм бийн матрицтай бол 25—40 минут, хэдэн мянгата тэнцүү эрэмбэ бүхий матрицтай бол 8—10 цаг тус ту шаардагдана.

Жишээ нь дор дурдсан ачаа тээвэрлэлтийн бодлогыг «Стрела» машинаар бодсон юм.

Явуулах есөн газраас хүлээн авах арвандөрвөн газарт ачаа түгээх шаардлага гарчээ. (15 дугаар хүснэгт)

Машинаар бодож олсон анхны сонголтыг 16 дугаар хүснэгт дээр сийрүүлэв.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	$a_i \backslash b_j$	18	13	21	7	18	12	11	30	15	9	20	8	11	7
1	33		13				12				8				
2	18											11			7
3	2				2										
4	38			21						6				11	
5	14				5						0	9			
6	23					13				9	1				
7	31					5			18				8		
8	38	18						8	12						
9	3							3							

16 дугаар хүснэгт.

Зохистой шийдэд харгалзах эцсийн сонголтыг 17 дугаар хүснэгтээр харууллаа.

Анхны сонголтод тохирсон өртөг $C = 971$, зохистой сонголтонд тохирсон өртөг $C = 703$ болохыг бодож олоход төвөггүй.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	$a_i \backslash b_j$	18	13	21	7	18	12	11	30	15	9	20	8	11	7
1	33		13				12			8					
2	18							11							7
3	2	2													
4	38	11		20						7					
5	14	1			7							6			
6	23										9	14			
7	31			1					30						
8	38	1				18							8	11	
9	3	3													

17 дугаар хүснэгт.

Энэ бодлогыг машинаар бодоход барагцаалбал нэг минут зарцуулсан.

$m \times n = 30 \times 38$ өртгийн матрицтай ачаа тээвэрлэлтийн өөр нэг бодлогыг бодоход 37 минут зарцуулсан.

IV БҮЛЭГ

АЧАА ТЭЭВЭРЛЭЛТИЙН БОДЛОГЫГ ЗӨВХӨН ХУГАЦААТАЙ НЬ ХОЛБОЖ БОДОХ

Ачаа тээвэрлэлтийн төлөвлөгөөг зохиоход цаг х гацаа хэмнэх явдлыг юуны түрүүнд чухалчлан үз нь практик дээр олонтаа тохиолддог. Жишээ нь ху дан гэмтэж, яс чанараа алддаг бүтээгдэхүүнийг з хих газарт нь аль болох богино хугацаанд хүргэ шаардлага бишгүй гардаг билээ. Тариа хураалты үеийн чухал нэг ажил нь үр тариаг аль болох хүр наар боловсруулах газарт хүргэж өгөх хэрэгтэй ба даг.

Ийм маягийн бодлогууд нь ачаа тээвэрлэлтий зөвхөн хугацаатай холбогдох бодлогууд мөн бөгөө ийм бодлогыг бодох нэгэн арга барилтай энэ бүлэг танилцана.

16 §. Асуудлыг тавьж, түүнийг шийдвэрлэх нь

Нэгэн төрлийн ачаа явуулах газрын тоо m, түү нийг хүлээн авах газрын тоо n гэж бодьё. $a_1, a_2, \ldots, a_i \ldots a_m$-ээр явуулах нэг, хоёр, $\ldots i \ldots$ дугаар газар тус бүрийн нэгж ачааны тоо хэмжээ $b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_n$-ээр хүлээн авах n газар тус бүр хүргэвэл зохих нэгж ачааны тоо хэмжээг тус т тэмдэглэв.

t_{ij}-ээр явуулах i дугаар газраас хүлээн авах j д гаар газарт ачаа хүргэхэд зарцуулах хугацааг (хоно

буюу цаг) x_{ij}-гээр явуулах i дугаар газраас хүлээн авах j дугаар газарт хүргэхээр төлөвлөсөн нэгж ачааны тоо хэмжээг тус тус тэмдэглэв. Ачаа тээвэрлэлтийн зохистой төлөвлөгөөг, өөрөөр хэлбэл, ачаа тээвэрлэлтийн хугацаа хамгийн бага байж чадах x_{ij}-гийн сөрөг биш утгуудыг олъё.

Энэ бодлогыг математикийн хэлэн дээр хөрвүүлэн дараах маягаар томьёолж болно.

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i \qquad (i=1,2,\ldots, m), \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} &= b_j \qquad (j=1,2,\ldots,n), \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

гэсэн алгебрын шугаман тэгшитгэлийн систем өгөгджээ. Үүнд; a_i, b_j нь

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_j$$

байх нөхцөлд тохирсон байг. Цаашилбал хугацааны матриц $T=(t_{ij})$ бас өгөгджээ гэж үзье. (27) системийн сөрөг биш $X=(x_{ij})$ шийд бүрд өөрөөр хэлбэл, тээвэрлэлтийн төлөвлөгөөнд, хэрэв $x_{ij}>0$ байвал $t^*_{ij}=t_{ij}$, хэрэв $x_{ij}=0$ байвал $t^*_{ij}=0$ байх элементүүд бүхий $T_x=(t^*_{ij})$ матриц харгалзана.

Янз бүрийн сөрөг биш X шийдүүдэд харгалзах $t_x^{\max}$-уудын дотроос хамгийн бага $t_{x\,\text{зох}}^{\max}$-д тохирох сөрөг биш $x_{\text{зох}}$ шийдийг олох зорилго тавья. Энэ бодлогын нөхцөлийг 18 дугаар хүснэгт дүрстэйгээр илэрхийлбэл тохиромжтой байдаг.

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	·	b_j	·	b_n
a_1	t_{11} / x_{11}	t_{12} / x_{12}		t_{1j} / x_{1j}	·	t_{1n} / x_{1n}
a_2	t_{21} / x_{21}	t_{22} / x_{22}	·	t_{2j} / x_{2j}		t_{2n} / x_{2n}
·		·				
a_i	t_{i1} / x_{i1}	t_{i2} / x_{i2}	·	t_{ij} / x_{ij}	·	t_{in} / x_{in}
·			·			·
a_m	t_{m1} / x_{m1}	t_{m2} / x_{m2}	·	t_{mj} / x_{mj}	·	t_{mn} / x_{mn}

18 дугаар хүснэгт

Энэ бодлого ачаа тээвэрлэлтийн зөвхөн өртөгт[ө]
нь холбож бодох бодлогын аргаар үл бодогдоно гэ[…]
гийг хялбархан үзүүлж болно.

Жишээ нь $C=\Sigma t_{ij}x_{ij}$ шугаман хэлбэр хамгий[…]
бага утгатай байж чадах шийд нь хугацааны хувь[…]
зохистой шийд байж чаддаггүй. 19 дүгээр хүснэгтэ[…]
тодорхойлогдсон бөгөөд 21 дүгээр зураг дээр дүр[…]
лэгдсэн жишээний, $C=\Sigma t_{ij}x_{ij}$ шугаман хэлбэрий[…]
минимумд тохирсон зохистой шийд 20 дугаар хүснэ[…]
тээр тодорхойлогдоно. Энэ хүснэгт ёсоор бол бү[…]
ачааг зохих газарт нь 6 хоногийн дараа хүргэж ч[…]
дах ажээ.

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

19 дүгээр хүснэгт

нөгөө талаас 21 дүгээр хүснэгтээр тодорхойлогдо[…]
төлөвлөгөө ёсоор шугаман хэлбэрийн утга бага зэр[…]
их байгаа боловч, уул ачааг хэрэгцээт газарт нь дөр[…]
вөн хоногийн дотор хүргэж болох боломжтой байна[…]

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3	5	2 / 10
15	4	1 / 10	6 / 5	7
25	1 / 5	9	4 / 15	3 / 5

$C=2\cdot10+6\cdot5+1\cdot10+3\cdot5+4\cdot15+1\cdot5=140$

20 дугаар хүснэгт

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4 / 5	1 / 10	6	7
25	1	9	4 / 20	3

$C=2\cdot10+3\cdot5+4\cdot20+1\cdot10+4\cdot5=145$

21 дүгээр хүснэгт

Түргэн гэмтэх бүтээгдэхүүнийг тээвэрлэхэд хөс[…]
тээврийн хурдыг нэмэгдүүлэх хэрэгтэй. Энэхүү н[…]
мэгдэл хурданд зарцуулсан нэмэлт зардал нь хүму[…]
сийн хэрэгцээнд зориулсан олон мянган тонн эдлэхү[…]
ний яс чанарыг хамгаалж чадсан явдлаар нөхөгдөн[…]

Ачаа тээвэрлэлтийн, зөвхөн хугацаатай нь холбо[…]
бодох бодлогыг шийдэх дор дурдсан аргын баталга[…]

нь II бүлэгт тайлбарласан шугаман программчлалын ерөнхий онолоос гарна.

Уул бодлогыг бодох аргыг 22 дугаар хүснэгтээр тодорхойлогдсон бодлогон дээр тайлбарлая. Энэ хүснэгтээс үзвэл явуулах зургаан газарт бага 125 нэгж ачааг хүлээн авах 7 газарт явуулах ёстой байна. Хүснэгтэн дэх тоонууд нь явуулах нэгэн газраас хүлээн авах нэг газарт ачаа хүргэхэд хэрэглэгдэх цагаар илэрхийлэгдсэн хугацаа болог. Жишээлбэл дөрөвдүгээр мөр, дөрөвдүгээр багана хоёрын уулзвар дээр орших 31 гэсэн тоо нь явуулах дөрөвдүгээр газраас хүлээн авах дөрөвдүгээр газарт ачаа хүргэхэд зарцуулах хугацаа 31 цаг байна гэдгийг харуулах ажгуу.

a_i \ b_j	20	13	11	27	9	5	40
15	12 / x_{11}	13 / x_{12}	34 / x_{13}	7 / x_{14}	8 / x_{15}	23 / x_{16}	19 / x_{17}
7	7 / x_{21}	18 / x_{22}	36 / x_{23}	40 / x_{24}	38 / x_{25}	6 / x_{26}	10 / x_{27}
45	11 / x_{31}	20 / x_{32}	30 / x_{33}	21 / x_{34}	21 / x_{35}	23 / x_{36}	31 / x_{37}
30	27 / x_{41}	12 / x_{42}	39 / x_{43}	31 / x_{44}	5 / x_{45}	35 / x_{46}	12 / x_{47}
12	17 / x_{51}	17 / x_{52}	32 / x_{53}	36 / x_{54}	22 / x_{55}	16 / x_{56}	14 / x_{57}
16	15 / x_{61}	38 / x_{62}	16 / x_{63}	[illegible] / x_{64}	23 / x_{65}	40 / x_{66}	28 / x_{67}

22 дугаар хүснэгт

Хугацааны хувьд зохистой төлөвлөгөө олох зорилго тавья.

22 дугаар хүснэгтийг бага хүснэгт гэж нэрлэж, түүнийг том хүснэгт гэж нэрлэгдэх 23 дугаар хүснэгт болгоё.

Энэ хүснэгтийн эхний мөрөнд x_{ij} хувьсагчийн 11-ээс 67 хүртэлх тэмдгүүд, доод мөрөнд нь t_{ij}-гийн ij дөрвөлжинд харгалзах утгуудыг бичжээ. Жишээ нь дээд мөрөн дэх 43 гэсэн хос тоо x_{43} хувьсагчийн байрыг заах ба энэ хувьсагчид тохирох t_{34}-ийн утга 39 байна. Ийм учраас 43,39 хоёр нэгэн багана дээр оршино.

Энэ хүснэгт явуулах газрын тоо буюу өгөгдсөн хүснэгтийн мөрүүдийн тоотой тэнцүү тооны зурвас болон хуваагдсанаас гадна хэвтээ шугамаар бас хоёр хэсэг хуваагджээ. Тэгэхдээ дээд хэсэгт нь зургаан мөр, доод хэсэгт долоон мөр тус тус орсон байна.

	11	12	13	14	15	16	17	21	22	23	24	25	26	27	31	32	33	34	35	36	37	41	42	43	44	45	46	47	51	52	53	54	55	56	57	61	62	63	64	65	66	67
=15	—	—	—	—	—	—	—																																			
=7								—	—	—	—	—	—	—																												
=45															—	—	—	—	—	—	—																					
=30																						—	—	—	—	—	—	—														
=12																													—	—	—	—	—	—	—							
=16																																				—	—	—	—	—	—	—
=20	—							—							—							—							—							—						
=13		—							—							—							—							—							—					
=11			—							—							—							—							—							—				
=27				—							—							—							—							—							—			
=9					—							—							—							—							—							—		
=5						—							—							—							—							—							—	
=40							—							—							—							—							—							—
	12	13	34	7	8	29	19	7	18	36	40	38	6	10	11	20	30	21	21	29	31	27	12	39	31	5	36	12	17	17	32	36	22	16	14	15	38	16	33	23	40	28

23 дугаар хүснэгт

Хүснэгтийн дээд хэсгийн нэгдүгээр мөрийн тооны тушаа нэгдүгээр зурваст долоон хасах тэмдэг, хоёрдугаар мөрийн тооны тушаа хоёрдугаар зурваст мөн долоон хасах тэмдэг тавих жишээтэйгээр бүх зурган зурваст хасах тэмдэг тавья. Жишээ нь 30-ын тушаа орших хасах тэмдгүүд дөрөвдүгээр зурвасанд бичигдэнэ. Хэрэв анхны хүснэгтийг энэ тэмдэглэлтэй уялдуулан харвал ачаа явуулах дөрөвдүгээр газарт үлдсэн ачааны хэмжээ

$$30 - x_{41} - x_{42} - x_{43} - x_{44} - x_{45} - x_{46} - x_{47}$$

болохыг харуулна.

Үүний нэгэн адил хүснэгтийн доорх хэсэг дэх мөр тус бүрд орших хасах тэмдгүүд нь хүлээн авах газарт дутагдсан ачааны хэмжээг илэрхийлнэ. Жишээлбэл 27-гийн тушаа орших хасах тэмдгүүд нь дөрөвдүгээр баганад харгалзах хүлээн авах газрын дутагдаж байгаа ачаа.

$$27 - x_{14} - x_{24} - x_{34} - x_{44} - x_{54} - x_{64}$$

гэй тэнцүү болохыг харуулна.

Өөрөөр хэлбэл хүснэгт дэх хасах тэмдгүүдийн байрлал нь бодлогын нөхцөлийг илэрхийлж байгаа гэдэгтэй тохирох ажээ.

III бүлэгт ашигласан аргыг хэрэглэж анхны шийдийг байгуулъя. Явуулах нэгдүгээр газрын 15 нэгж ачааг хүлээн авах газруудад хамгийн бага хугацаа зарцуулан түгээж, дараа нь явуулах хоёрдугаар газрын 7 нэгж ачааг хэрэгцээ нь хангагдаагүй байгаа хүлээн авах газруудад хуваарилах жишээтэй цаашид үргэлжлүүлъе. Энэ нь 24 дүгээр хүснэгтээр илэрхийлэгдэх анхны (ерөнхийдөө зохистой биш) шийд юм.

$c_i \backslash b_j$	20	13	11	37	9	5	40
15	12	13	34	7 (15)	8	29	19
7	7 (2)	18	36	40	36	6 (5)	10
45	11 (18)	20 (13)	30	21 (12)	21 (2)	29	31
30	27	12	39	31	5 (7)	36	12 (23)
12	17	17	32	36	22	16	14 (12)
16	15	38	16 (11)	33	23	40	28 (5)

24 дүгээр хүснэгт

Хялбархан байгуулсан энэ шийд ёсоор ачаа тэ
вэрлэлтийг 28 цагийн дотор гүйцэтгэж болох ажэ
Энэ нь $t_{ij} > 28$ байх нүдүүдийг анхааралдаа авахгү
байж болох боломжийг өгнө. Дурдсан хүснэгтэнд ч
хамхуу үүнийг баримталсан билээ.
Ачаа тээвэрлэлтийг 28 цагаас бага хугацаанд гү
цэтгэж болох шийдийг олохын тулд том хүснэгт
дахин авч үзье. Энэ хүснэгтэнд тохирсон анхны со
голтыг дараах маягаар гүйцэтгэнэ. Хүснэгтийн хамги
доод мөрөн дэх t_{ij}-гийн нэгдүгээр зурвас дахь утгууды
дотроос хамгийн багыг нь хайж олъё. Энэ нь 14 дүгээ
багана буюу x_{14} хувьсагчид тохирох 7 гэсэн тоо байн
Энэ баганыг ажиглавал x_{14}-ийг 15-тай тэнцүү гэ
үзэж болох санаа төрнө. Учир нь нөөц ачаа 15 нэг
байхад хэрэгцээ 27 нэгж байна. Энэ нь x_{14} хувьса
чийг хүснэгтийн нэгдүгээр мөрийн эхэнд бичих нэ
дүгээр мөр 14 дүгээр багана хоёрын уулзвар дээр о
ших хасах тэмдгийг орхих боломж өгч байгаа юм. 2
гийн тушаа орших хоёр дахь хасах тэмдгийг бас орх
хэрэгтэй ба 27-гийн орших мөрөөс 15-ын орших м
рийг хасах хэрэгтэй.
Үүний дүнд нэгдүгээр зурвасын нэг ба аравдугаа
мөрөнд

$$x_{14}=15|-|-|-| \quad |-|-|-|,$$
$$=12|+|+|+| \quad |+|+|+|$$

дүрстэй өөрчлөлт гарсан байна.
Одоо хоёрдугаар мөр, хоёрдугаар зурвасанд ши
жиж оръё. Хоёрдугаар зурвас дахь t_{ij} тоонууды
дотроос хамгийн багыг нь эрвэл x_{26}-д тохирох 6 гэс
тоо олдоно. Энэ баганын дагуу орших хоёр хас
тэмдгийн харалдаа зүүн талд нь орших хоёр тоо
хамгийн бага тоо 5-ыг сонгон авч 5-ын орших мөр
дугаар багана хоёрын уулзвар дээр орших хасах тэм
гийг орхиж, x_{26} хувьсагчийг 5-ын тушаах тэгшит
лийн зүүн талд бичье. Дараа нь хоёрдугаар мөр
дугаар багана хоёрын уулзвар дээр орших хасах тэм
гийг бас орхиж 7-гийн орших хоёрдугаар мөрөөс 5-
орших мөрийг хасвал хоёрдугаар мөрөнд 2 гэсэн т
үлдэнэ. Энэ нь явуулах хоёрдугаар газрын ачаа, х
лээн авах газруудын хооронд түгээгдэж дуусааг
байгааг гэрчилж байна. Ийм учраас хоёрдугаар зу
васанд t_{ij}-гийн хоёр дахь бага утгыг эрж олно.

	11	12	13	14	15	16	17	21	22	23	24	25	26	27	31	32	33	34	35	36	37	41	42	43	44	45	46	47	51	52	53	54	55	56	57	61	62	63	64	65	66	67
$x_{14}=15$	−	−	−		−	−	−																																			
$x_{21}=2$						+			−	−	−	−		−						+							+							+							+	
$x_{35}=2$	0	0	−		−	0	−		0	−	0	−		−			−			0	−	+	+		+		+		+	+		+		+		+	+		+		+	
$x_{47}=23$			−				−			−				−			−				−	0	0	−	0		0		+	+		+	+	+		+	+		+	+	+	
$x_{57}=12$																													−	−	−	−	−	−								
$x_{67}=5$			+							+							−														+					−	−		−	−	−	
$x_{31}=18$	−								+	+	+	+		+						−		−					−		−					−		−					−	
$x_{32}=13$		−							−														−							−							−					
$x_{63}=11$			−							−							−							−							−											
$x_{34}=12$	+	+	+		+	+	+				−														−							−							−			
$x_{45}=7$			+		0		+			+		0		+			−				+	−	−		−		−		−	−		−	−	−		−	−		−	−	−	
$x_{26}=5$						−														−														−							−	
$=0$			0				0			0				0			0				0			0					0	0	0	0	0	0		0	0		0	0	0	
	12	13	34	7	8	29	19	7	18	36	40	38	6	10	11	20	30	27	21	29	31	27	12	39	31	5	36	12	17	17	32	36	22	16	14	15	38	16	33	23	40	28

25 дугаар хүснэгт

Энэ нь x_{21} хувьсагчийн орших багана дээр байх гэсэн тоо юм. Энэ баганын дагуу орших хоёр хас тэмдгийн хаpалдаа байх 20,2 хоёрын багыг нь сонг авч 21 дүгээр багана дахь хасах тэмдгүүдийг срх x_{21} хувьсагчийг 2-ын хаpалдаа орших тэнцэтгэли зүүн талд бичиж, долоодугаар мөрөөс хоёрдугаар м рийг хасъя. Үүний дүнд хоёрдугаар мөрийн бүх ач түгээгдэж дууслаа. Энэ ажиллагааг зургаадугаар м рийн бүх ачаа түгээгдэж дуусах хүртэл үргэлжлүү нэ. Энэ бүхний дүнд (24) хүснэгтээр тодорхойлогд анхны шийд олдох ба том хүснэгт маань 25 дуга хүснэгт болон хувирна.

Хэрэв «+» ба «—» тэмдгийн аль нь ч байхгүй,м сүүлчийн хүснэгтээс олдож байвал олсон шийд маа үнэн зөв байна. Хэрэв түгээх ажиллагаанд алдаа раагүй бол, дурдсан мөр зөвхөн тэгээс тогтсон б на. Бидний авсан жишээнд хамгийн сүүлчийн мөр и мөр юм.

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_j\right.$$ нөхцөл ёсоор (27) системийн тэгшитгэл бусдынхаа мөрдлөг байх ёстой.)

Энэ хүснэгтэд, үндсэн хувьсагчид харгалзах ба нуудыг босоогоор $t_{ij}>28$-д тохирох баганyyдыг шуугаар тус тус зураасласан. Ташуу зураастай ба нуудыг цаашид авч үзэхээ больё. Хорин тавдуга хүснэгт анхныхыг бодвол шийд байгуулах арай вуу талтай замыг зааж байна.

Үнэхээр ч бид $t_{ij}=28$ байх багана дээр орших ху сагч, тухайлбал x_{67} тэгтэй тэнцүү байх тийм шийд о хыг хүссэн билээ. Гэтэл x_{67}-гийн утгыг эсвэл x_{61}, эс x_{65} хувьсагчуудын утгыг багасгах замаар багас болохыг энэ хүснэгт үзүүлж байна.

x_{61} хувьсагчид $t_{61}=15$, x_{65} хувьсагчид $t_{65}=$ тус тус харгалзаж байгаа болохоор x_{61}-ийг ихэс x_{67}-г багасгая. 61 дүгээр багана дээрх «—» тэмдг хаpалдаа зүүн талд нь орших хамгийн бага элем нь $x_{67}=5$ байна.

Одоо сүүлчийн хүснэгтийг дараах маягаар өөрчи Ташуу зураастай баганyyдын бүрэлдэхүүнээс x_{67} вэл $t_{ij}=28$-ыг агуулсан) хувьсагчийг агуулсан б ныг хасаж x_{67}-гийн оронд x_{61}-ийг бичье. Цааш нь дүгээр багана дахь хасах тэмдэг агуулсан мөр

	11	12	14	15	17	21	22	26	27	31	32	34	35	41	42	45	47	51	52	55	56	57	61	63	65
$x_{14}=15$	−	−		−	−																				
$x_{21}=2$							−		−												+				
$x_{35}=7$				−	−				−					+	+			+	+		+				−
$x_{47}=28$					−				−									+	+	+	+				0
$x_{57}=12$																		−	−	−	−				
$x_{61}=5$																									−
$x_{31}=13$	−						+		+					−				−			−				+
$x_{32}=13$		−					−								−				−						
$x_{63}=11$																									
$x_{34}=12$	+	+		+	+																				
$x_{45}=2$					+				+						−	=			−	−	−				0
$x_{26}=5$																									
	12	13	7	8	19	7	18	6	10	11	20	21	21	27	12	5	12	17	17	22	16	14	15	16	23

26 дугаар хүснэгт

x_{61}-д харгалзсан мөрийг хасаж, мөн баганын нэмэх тэмдэгтэй мөрүүд дээр, x_{61}-ийн орших мөрийг нэмбэл 61 дүгээр баганын «—» ба «+» тэмдгүүд арилна.

Үүний дүнд 26 дугаар хүснэгтийг гарган авна. Энэ хүснэгтээс үзвэл ачаа тээвэрлэлтийг үлэмж бага хугацаанд, өөрөөр хэлбэл 28 цагийн дотор биш 21 цагийн дотор гүйцэтгэж болох шийдийг гарган авсан ажээ. (Хэрэв x_{67} хувьсагчийг тэгтэй тэнцүүлэх ажиллагааг x_{61}-ийг ихэсгэх замаар биш харин x_{65}-ыг ихэсгэх замаар гүйцэтгэсэн ахул $t_{65}=23$-тай тэнцүү хамгийн их хугацаа бүхий шийд гарган авах байсан ба үүний дараа $t_{ij}>23$ байх бүх баганыг дарж, $t_{ij}=21$ байх хамгийн их хугацаа бүхий гурав дахь шийдийг олох бас нэг алхам хийх байсныг тэмдэглэе).

Хувиралт нь хоёрдугаар шийдэд хүргэсэн x_{67}, x_{35}, x_{13}, x_{31}, x_{45}, x_{61} хувьсагчдыг дугуйлан тэмдэглэе. Ажнил эдгээр хувьсагч битүү хэлхээ үүсгэх ажээ. (27 дугаар хүснэгт)

Хэлхээ үүсгэж байгаа хувьсагчдыг агуулсан нүднүүдийг (зайлуулбал зохих) x_{67} хувьсагчийг агуулсан нүднээс эхлэн дугаарлая. Энэ хэлхээний сондгой дугаартай нүдүүдэд заавал x-ээр сонгогдсон элементүүд орших ба тэгшид нь $t_{ij} \leqslant t_{ij}^{\text{зайл}}$ элементүүд орших юм байна. Үүнд $t_{ij}^{\text{зайл}}$ нь t_{ij}-гийн зайлуулбал зохих утга юм. (Үзэж буй тохиолдолд $t_{67}^{\text{зайл}}=28$) Ийм хэлхээг хөнгөлөгдсөн хэлхээ гэж нэрлэе. Хөнгөлөгдсөн хэлхээг олсны дараа шинэ шийд олохын тулд сонд-

a_i \ b_j	20	13	11	27	9	5	40
15	12	13	34	7 (15)	8	29	19
7	7 (2)	10	36	40	38	6 (5)	10
45	11	[illegible]	30	21 (12)	21 (2)	29	31
30	27	12	39	31	5 (7)	36	12 (23)
12	17	17	32	36	22	16	14 (12)
16	15	38	16 (11)	33	23	40	28 (5)

27 дугаар хүснэгт

гой, хагас хэлхээн дэх нэгж ачаануудын хамгийн б
гыг хэлхээн дээгүүр шилжүүлнэ. Жижиг хүснэгт
дээр байгуулсан энэ байгуулалт хоёрдугаар шийди
өгөх бөгөөд энэ шийд нь том хүснэгтэн дээр ба
гуулсан хоёрдугаар шийдтэй давхцана. $t_{ij}>21$ ба
баганoccуудыг (нүднүүдийг) цаашид авч үзэхээ боль
Үүний дунд 23 дугаар бага хүснэгт, 26 дугаар т
хүснэгтийг тус тус гарган авна. (41, 55,65 дугаар б
ганануудыг дарсанд тооцож) ачаа тээвэрлэлтийг 21 ц
гаас бага хугацаанд гүйцэтгэж чадах улам илүү з
хистой шийд олдох уу? гэдэг асуулт аяндаа гарч
Энэ асуултанд хариулахын тулд 26 дугаар хүснэ
тийг авч үзье. t_{ij}-гийн орших мөрнөөс түүний ха
гийн их утга 21-ыг хайж олъё. Энэхүү $t_{34}=21$ ут
x_{34} хувьсагч харгалзах ба x_{34} орших мөрөнд зөвх
«+» тэмдгүүд байна. Энэ мөрөнд «—» тэмдэг байхгү
байгаа явдал x_{34} хувьсагчийг бусад аль ч хувьса
чийнх нь утгаар багасгаж болохгүйг гэрчилж байн
x_{34}-ийг гаргах, иймд $t_{34}=21$-ээс чөлөөлөгдөх ям
ч боломж энэ үед алга. Тийнхүү сүүлчийн шийд
хугацааны хувьд зохистой шийд ажээ. Энэ шийд ёсо
ачаа тээвэрлэлтэд 21 цаг шаардагдах ба 28 дуга
жижиг хүснэгтэнд хөнгөрсөн хэлхээ байгуулах б
ломжгүй.

Ачаа тээвэрлэлтийн зөвхөн хугацааны хувьд б
догдох бодлогыг тайлбарлах зорилгоор том жиж
хоёр хүснэгт ашигласан билээ.

Ийм бодлогыг биечлэн бодоход жижиг буюу т
ганцхан хүснэгт ашиглаж болох ба гагцхүү дото
тоонуудыг харандаагаар бичих хэрэгтэй. Иймхүү н

шийдээс нөгөө шийдэд шилжих ажлыг ганцхан хүснэгтэн дээр баллуур харандаа хоёрын тусламжтай гүйцэтгэж болох ажээ.

a_i \ b_j	20	13	11	27	9	5	40
15	12	13	34	7 (15)	8	29	19
7	7 (2)	18	36	40	38	6 (5)	10
45	11 (13)	20 (15)	30	21 (12)	21 (7)	29	31
30	27	12	39	31	5 (2)	36	12 (28)
12	17	17	32	36	22	16	14 (12)
16	15 (5)	38	16 (11)	33	23	40	28

C=1716 к

28 дугаар хүснэгт

Ачаа тээвэрлэлтийн хугацааны хувьд бодогдох бодлогын бодох зохистой шийдийг жижиг хүснэгт ашиглан олох дүрмийг дараах маягаар томьёолж болно.

1. Бодлогын нөхцөлийг жижиг хүснэгтэнд бичнэ.
2. Анхны шийдийг олно. (Жишээ нь дээр дурьдсан иргаар)
3. Энэ шийдэд тохирсон $t_{ij}^{1\max}$-ыг олно.
4. $t_{ij}>t_{ij}^{1\max}$ байх бүх нүднүүдийг дарна.
5. $t_{ij}^{1\max}$ элемент бусад элементүүдтэй хөнгөрсөн хэлхээ үүсгэж буй эсэхийг шинжилнэ.
6. Хэрэв $t_{ij}^{1\max}$ элементэд тохирох нүдийг бүрэн суллаж болох боломжгүй бол (өөрөөр хэлбэл харгалзах x_{ij}-ийг тэг болгож хувиргах) $t_{ij}^{1\max}$-тай шийд нь зохистой шийд байна.
7. $t_{ij}^{1\max}$-тай нүдийг бүрэн сулласны дараа шинээр гарган авах шийдэд тохирох $t_{ij}^{2\max]}$ —ыг олно.

Ийнхүү бид зохистой шийд олох анхны алхмыг хийлээ. Хэрэв үүний дунд зохистой шийд гарч ирэхгүй бол дурдсан дүрмийн 4 дүгээр зүйлийг ашиглаж хоёрдугаар алхамд шилжин орно.

Зохистой шийд гаргаж авахын тулд төгсгөлтэй тооны алхам хийнэ.

Энэхүү дүрмийг ашиглахад тохиолдох гол бэрхшээ нь хөнгөрсөн хэлхээ гаргаж авахад оршино. Гэв ашиглах аргатай нь дээр бид тодорхой танилцсан то хүснэгтийг ашиглавал онц бэрхшээлгүйгээр зохисто шийдийг гарган авах боломжтой.

Энэ бодлогыг бодох өөр арга сэлтүүдийг дурдаж болох юм.

m, *n* хоёр цөөхөн байх үед иймд бодлогуудыг га аргаар бодож болох ба *m*, *n* хоёр олон байхад тооцо бодох электрон машин хэрэглэхээс өөр зам байдаггүй Ачаа тээвэрлэлтийн зөвхөн хугацааны хувьд бодогдо бодлогыг машинаар бодоход зарцуулах хугацаа, өрт гийн хувьд бодох бодлогынхтой бараг адилхан байна

17 §. Ачаа тээвэрлэлтийн бодлогын өртөг ба цаг хугацааг зэрэг оролцуулан бодох

Практик үйл ажиллагаан дээр өртгийн ба цаг хуга цааны хувьд зохистой төлөвлөгөөнүүдийн дунда төлөвлөгөөг хэрэгжүүлбэл зохимжтой байх тал би Асуудлыг хялбарчлахын тул өртөг нь хугацаанда пропорциональ, өөрөөр хэлбэл $c_{ij}=Kt_{ij}$ гэж үзье.

Бидний дээр авч үзсэн жишээний өртгийн хув дахь зохистой шийд нь 29 дүгээр хүснэгтээр тодо хойлогдох ба 28 цагийн дотор $C=K(7\cdot15+6\cdot5+$

a_i \ b_j	20	13	11	27	9	5	40
15	12	13	34	7 15	8	29	19
7	7	18	36	40	38	6 5	10 2
45	11 20	20 13	30	21 12	21	29	31
30	27	12	39	31	5 9	36	12 21
12	17	17	32	36	22	16	14 12
16	15	36	16 11	33	23	40	28 5

$C=1668\,K$

29 дүгээр хүснэгт

$+10\cdot2+11\cdot20+20\cdot13+21\cdot12+5\cdot9+12\cdot21+14\cdot12$
$+16\cdot11+28\cdot5=K\,1668$ нэгж өртөгтэйгээр уул ач тээвэрлэлт гүйцэтгэгдэнэ.

Хугацааны хувьд зохистой шийдэд харгалзах өртөг нь (28 дугаар хүснэгт) $C=K(7\cdot15+7\cdot2+6\cdot5+11\cdot13+20\cdot13+21\cdot12+21\cdot7+5\cdot2+12\cdot28+14\cdot12+15\cdot5+16\cdot11)=1716\,K$ байна.

a_i \ b_j	20	13	11	27	9	5	40	
15	12	13		7 15	8		19	+14 +4
7	7 2	18				6 5	10	+8
45	11 13	20 13		21 12	21 7			+4
30		12			5 2		12 28	+20
12	17	17				16	14 12	+18
16	15 5		16 11					
	−15	−20 −4	−18	−21 −4	−21 −4	−6 −8	−14 −18	

30 дугаар хүснэгт

$1716\,K-1668\,K=48\,K$ өртөг илүү зарцуулж, өртгийн олсон зохистой шийдээр тодорхойлогдох хугацаанаас 7 цагийн өмнө уул тээвэрлэлтийг гүйцэтгэж болох нь харагдаж байна.

Энэ жишээнээс үзвэл ялигүй нэмэгдэл зардал гаргах замаар ачаа тээвэрлэлтийг үлэмж богино хугацааны дотор гүйцэтгэж хугацаа хожиж болох ажээ.

a_i \ b_j	20	13	11	27	9	5	40	
15	15	7		0 15	1		5	
7	0	2				0 5	−14 2	+14
45	0 15	0 13		0 12	0 5			
30		8			0 4		0 26	
12	20	11				20	0 12	
16	0 5		0 11					
						−14		

31 дүгээр хүснэгт

Хэрэв ачаа тээвэрлэлтийг гүйцэтгэх тодорхой хугацаа заагдсан байвал дурдсан аргыг ашиглаж, энэ хугацаанд амжих бөгөөд өртгийн хувьд зохистой тө-

лөвлөгөөг олж болно. Ер нь хугацааг чухалчлан үзвэ[illegible] хугацааны хувьд зохистой шийдийг олох ба хэрэ[illegible] $t_{ij}^{зох}$-той шийд өртгийн хувьд хамгийн сайн нь би[illegible] байвал шугаман хэлбэрийн минимумийг олох арга бари[illegible] лыг ашиглаж, хугацааны хувьд зохистой ($t_{ij}^{зох}$ хуга[illegible] цаанд гүйцэтгэгдэх) шийдүүдийн дотроос өртгий[illegible] хувьд зохистойг нь шилэн авч болно. Жишээлбэл бид[illegible] ний танил нэгэн жишээний хугацааных нь хувьд бодо[illegible] олсон (30 дугаар хүснэгтээр үзүүлсэн) зохистой ший[illegible] нь өртгийн хувьд зохистой шийд болж чадахгүй. Одо[illegible] x-ээр сонгогдсон элементүүдийг нь тэг болгож хувир[illegible] гая. (x-ээр сонгогдсон элементүүдийг тэг болгож ху[illegible] виргах үед дарагдсан нүднүүд дэх элементүүдийг ү[illegible] анхаарна) (31 дүгээр хүснэгт)

a_i \ b_j	20	13	11	27	9	5	40
15	15	7		0 / 15	1		5
7	14	16				0 / 5	0 / 2
45	0 / 15	0 / 13		0 / 12	0 / 5		
30		8			0 / 4		0 / 26
12	20	11				6	0 / 12
16	0 / 5		0 / 11				

$C = 1688 K$

32 дугаар хүснэгт.

Үүний дунд (—14) элементийг агуулсан хүснэгт га[illegible] ган авлаа. 31 дүгээр хүснэгтийг дахин хувиргаж [illegible] дугаар хүснэгтийг гарган авна. Энэ хүснэгтэнд x-ээ[illegible] сонгогдсон элементүүд тэгтэй тэнцүү, бусад нь сөрө[illegible] биш байна. Иймучраас энэ шийд нь өртгийн хувь[illegible] зохистой шийд ажээ. Энэ төлөвлөгөө нь 21 цагийн дө[illegible] тор $C = 1688\ K$ өртөгтэйгээр биелэгдэх бөгөөд 1716 кг[illegible] бодвол нилээд бага өртөгтэй юм.

Сүүлийн жилүүдэд эдийн засаг, техник, цэргий[illegible] үйл ажиллагаа зэрэгт шугаман программчлалын ар[illegible] улам өргөн дэлгэр хэрэглэгдэх болж байна. Шугама[illegible] программчлалын арга ба онол тасралтгүй хөгжиж ш[illegible] нэ шинэ бодлого бодож чадах болж байна. Ялангуя[illegible] тооцон бодох техникийн эрчимтэй хөгжил шугама[illegible]

программчлалын ямар ч бодлогыг бодох боломжтой болголоо.

Шугаман программчлалын аргын цаашдын хөгжил, түүнийг ардын аж ахуйн зорилтод ашиглах явдал манай орны үйлдвэрлэлийг зохион байгуулах, төлөвлөх ажилд асар их тус нэмэр үзүүлэх нь дамжиггүй.

ХОЛБОГДОХ НОМЫН ЖАГСААЛТ

1. Л. В. Канторович, Математические методы организации и планирования производства, изд. ЛГУ, 1939.
2. Л. В. Канторович и М. К. Гавурин Математические методы анализа грузопотоков, сб. АН СССР «Проблемы повышения эффективности работы транспорта», 1953.
3. Б. М. Каган и Т. М. Тер-Микаэлян, Решение инженерных задач на автоматических цифровых вычислительных машинах, Госэнергоиздат, 1958.
4. А. И. Китов, Электронные цифровые машины, изд. «Сов' радио» 1956.
5. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, физматгиз, 1959.
6. Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры и многогранники, Гостехиздат, 1956.
7. С. И. Черников, Линейные неравенства, УМН, т. 8, вып. 2 1953.
8. Н. В. Черникова, Наименьшие и наибольшие значения линейной формы на многограннике, УМН, т. 12, вып. 2 (1957).
9. A. Charnes, W W. Cooper and A. Henderson, An Jntroduction to linear Programming, John Wiery, New York, 1953.
10. C. W. Churchman, R. L. Ackoff, C. L. Arnoff, Jntroducticn in Operations Research, Lcndcn—New Ycrk. 1955.
11. D. Chandler, Linear Programming and Computers, New York, 1955.
12. A. Glaisel, Algorithm for Solution of Transportation Problem. 1955.
13. S. Vajda, The Theory of Cemes and Linear Programming, London-New York, 1956.